



Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 1.-

Introducción

Pedro Álvarez Causelo

Departamento de Economía

Universidad de Cantabria

alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.1 ¿Qué es la teoría de juegos?

La *teoría de juegos* es una herramienta para el estudio de las situaciones de interdependencia estratégica. En esta pregunta se hace una primera aproximación a la materia. En primer lugar, se describe lo que se entiende por una situación de interdependencia estratégica y se ponen algunos ejemplos, prestando especial atención a la presencia de este tipo de situaciones en la economía. En segundo lugar, se presentan las características fundamentales de su método de trabajo y se explican las diferencias entre el enfoque cooperativo y el no cooperativo. Por último, se hace una breve referencia a su desarrollo histórico.

1.1.1 Objeto

La teoría de juegos tiene por objeto de estudio las situaciones de *interdependencia estratégica*. En este tipo de situaciones cada uno de los decisores de un grupo es consciente de que las consecuencias de su decisión dependen de las que tomen los demás. El nombre de teoría de juegos proviene precisamente del hecho de que muchas de las situaciones que denominamos juegos en el lenguaje común, son situaciones más o menos sencillas de interdependencia estratégica: cada jugador tiene que decidir que hacer sabiendo que dicha elección será «buena» o «mala» en función de lo que hagan los demás. En esa interacción entre los jugadores desempeñan un papel esencial las denominadas *reglas de juego*, que son las que determinan en última instancia las condiciones en que deciden los jugadores y las consecuencias de sus decisiones.

La vida social, en sus distintos ámbitos, esta llena de situaciones en las que se produce interdependencia entre las decisiones de distintos individuos u organizaciones en el marco de unas determinadas reglas más o menos explícitas. De como toman esos individuos u organizaciones sus decisiones, y de como influyen en las mismas las reglas en cuyo marco deciden, es precisamente de lo que se ocupa la teoría de juegos. Debemos considerarla, por tanto, como una herramienta capaz de ayudarnos a comprender que factores influyen en la forma en que se desarrollan dichas situaciones.

Si nos preguntamos por la utilidad de estudiar teoría de juegos, caben varias respuestas:

- para ser buenos estrategas, esto es, como instrumento que nos ayude a elegir la estrategia óptima en las distintas situaciones de interdependencia estratégica en que nos veamos involucrados;
- para comprender los determinantes del comportamiento de los decisores en las distintas situaciones de interdependencia estratégica y, a partir de ahí:
  - predecir su comportamiento bajo unas determinadas reglas;

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

- diseñar marcos de interacción (reglas) en el que las estrategias de los jugadores lleven a los resultados deseados (*diseño de mecanismos*).

Interdependencia estratégica y economía

En tanto que herramienta para el análisis de las situaciones de interdependencia estratégica, la teoría de juegos no sólo es utilizada en el campo de la economía, sino también en otros muchos como las ciencias políticas, la psicología, el derecho, la filosofía e incluso la biología evolutiva o la informática. Sin embargo, desde sus inicios ha sido en el ámbito de la economía donde ha presentado un mayor desarrollo. Aunque, como veremos posteriormente, presenta una mayor afinidad con la microeconomía, hoy en día constituye una herramienta imprescindible en las distintas ramas de la economía (macroeconomía, economía de la empresa, finanzas, economía laboral,. . .).

Entendida la economía como la ciencia que se ocupa de como canalizan las distintas sociedades las fuerzas que se derivan de la escasez de recursos, no puede sorprendernos el éxito que en ella ha tenido el uso de la teoría de juegos. Escasez implica *conflicto* por apropiarse de lo escaso, pero a la vez induce a la *cooperación* en la medida que ésta permite un mejor aprovechamiento de esos recursos. Precisamente para esto, para el estudio de la cooperación y del conflicto, es para lo que resulta útil la teoría de juegos.

La potencialidad del uso de la teoría de juegos en la economía se pondrá de manifiesto a medida que nos vayamos familiarizando con su método y a través de las distintas aplicaciones que iremos viendo a lo largo del curso. En cualquier caso, resulta inmediato asociarla con el estudio de los mercados oligopolistas, de las subastas, de la negociación colectiva, de las relaciones comerciales entre países, ... La interdependencia estratégica esta presente prácticamente en todos los ambitos de decisión de los agentes privados y de la intervención pública en la economía. En el Ejercicio 1.1.1 se pide una breve reflexión sobre ello.

► Ejercicio 1.1.1

Ponga algún ejemplo de situación de interdependencia estratégica relacionado con:

- los distintos ámbitos de decisión de las empresas (con sus clientes, con sus trabajadores, con sus competidores,. . .)
- los distintos ámbitos de decisión de los ciudadanos (como consumidores o usuarios, como trabajadores, como contribuyentes, como votantes,. . .)
- los distintos ámbitos de intervención pública en la economía (regulación, política fiscal, política monetaria, . . .)

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.1.2 Método

La forma de trabajar en la teoría de juegos consiste básicamente en la elaboración y manejo de un tipo especial de modelos que se denomina genéricamente *juego*. Un juego es, por tanto, un *modelo* de una situación de interdependencia estratégica. Como ocurre con cualquier otro modelo, el objetivo es utilizar un proceso de *abstracción* que nos lleve de la situación real a un sistema de relaciones más sencillo, pero más claro y preciso, en cuyo marco se verá facilitado el *análisis deductivo*. Cuando trabajamos con nuestros modelos, esperamos que nos permitan descubrir alguna de las fuerzas subyacentes a la situación real de interdependencia estratégica que de otro modo podrían pasarnos desapercibidas. Evidentemente, los resultados derivados del modelo requieren de una interpretación para ser aplicados a la situación real que pretende representar, en la que siempre actuarán otras fuerzas que hemos pasado por alto en la construcción y manejo del modelo.

Aunque en estos apuntes se pone el énfasis en las aplicaciones de la teoría de juegos (en especial al ámbito de la economía), debemos señalar que la teoría de juegos es considerada como una rama de las matemáticas. El uso de las matemáticas nos obliga a la definición precisa de los conceptos y de los supuestos de partida, a la vez que nos facilita el proceso deductivo que nos lleva de esos supuestos a una serie de conclusiones consistentes con los mismos.

Aunque, como ya hemos señalado en el apartado anterior, hoy en día la teoría de juegos se utiliza prácticamente en todas la ramas de la economía, presenta una mayor afinidad con el análisis microeconómico . El principio del *individualismo metodológico*, tan característico de la microeconomía, esta implícito también en buena parte de la teoría de juegos. El supuesto de *racionalidad* en la toma de decisiones y el concepto de *equilibrio* están presentes en la mayor parte de los juegos que analizaremos, de la misma manera que lo estaban en los modelos microeconómicos ya vistos. El análisis del funcionamiento de las estructuras básicas de mercado constituye un buen ejemplo de ello. Los modelos básicos de competencia perfecta y monopolio tienen en común la ausencia de interdependencia estratégica; en el caso del monopolio por la presencia de un único oferente y en el de la competencia perfecta por el supuesto de *atomismo* de los agentes. El recurso a la teoría de juegos surge de manera natural al tratar de extender este tipo de modelos a una situación en con un número reducido de oferentes, cada uno de ellos consciente de que sus resultados dependen de lo que haga el resto.

Dos enfoques distintos: juegos cooperativos frente a juegos no cooperativos

Los modelos de la teoría de juegos se agrupan en dos grandes grupos, cada uno de los cuales adopta un enfoque diferente a la hora de analizar las situaciones de interdependencia estra-

tégica. Los denominados *juegos no cooperativos*, son modelos en los que se parte de una especificación detallada de las condiciones en las que deciden los jugadores (las reglas del juego) y el objetivo es analizar el comportamiento que cabe esperar por parte de cada uno de ellos. En los denominados *juegos cooperativos*, se parte de de la especificación de los resultados que obtendrían las posibles coaliciones de jugadores y el objetivo es tratar de analizar cuáles de ellas cabe esperar que se sostengan de acuerdo con determinados criterios. Podríamos decir que, mientras la teoría de los juegos no cooperativos se centra más en el procedimiento (en como deciden los jugadores), la teoría de los juegos cooperativos se centra más en los resultados, sin entrar en detalles sobre cómo se alcanzarán. La denominación utilizada puede llevar a confusión, ya que en la cooperación es objeto de estudio de los juegos no cooperativos, de la misma manera que la competencia entre los jugadores está presente en muchos juegos cooperativos. Lo importante es recordar que son dos maneras distintas de enfocar las situaciones de interdependencia estratégica. El Ejemplo 1.1.1 presenta un juego sencillo construido bajo el enfoque no cooperativo y el Ejemplo 1.1.2 uno construido bajo el enfoque cooperativo. La asignatura se centra en el estudio de los juegos no cooperativos y sus aplicaciones a la economía, si bien en el Tema 7 se hace una breve introducción al enfoque cooperativo.

Ejemplo 1.1.1 (Un juego no cooperativo: modelo de localización espacial de Hotelling)

El economista Harold Hotelling planteó en 1929 un modelo de localización espacial que ha alcanzado posteriormente una gran popularidad[a]. En dicho modelo, Hotelling planteaba una situación en la cual dos empresas que vendían un producto homogéneo a un precio dado tenían que decidir donde localizarse a lo largo de una ciudad lineal, cuya longitud puede normalizarse, sin pérdida de generalidad, a la unidad. Se supone también que los consumidores están uniformemente distribuidos a lo largo de la misma y tienen demandas unitarias (deciden a que empresa compran una única unidad del bien). Los consumidores incurren en un coste de transporte o de desplazamiento por lo que comprarán a la empresa que tengan más cerca. Si las dos empresas eligen la misma ubicación cada una de ellas abastecerá a la mitad de los consumidores.



Figura 1.1. *Modelo de ciudad lineal de Hotelling con dos empresas.*

Bajo determinadas condiciones, no demasiado restrictivas, la idea de equilibrio, entendido como situación en la cual ambas empresas están satisfechas con su localización, es

sufiente para «resolver» este juego. En efecto, sólo existe una localización posible en la que se cumpla que ninguna de ellas querrá moverse si la otra no lo hace: cuando ambas se sitúan en el centro de la ciudad. ¿Para que nos sirve este modelo? Para identificar una fuerza importante que influirá en situaciones parecidas a ésta y que se conoce como *principio de diferenciación mínima*. No se pretende en ningún caso que el modelo recoja perfectamente la situación real en toda su complejidad ni, por tanto, tampoco que la explique de manera perfecta. El proceso de abstracción implícito en la construcción del modelo y el proceso deductivo basado en el concepto de equilibrio, constituyen conjuntamente una herramienta útil en tanto nos permite descubrir fuerzas que operan en las situaciones reales y que de otra manera nos pasarían desapercibidas. Una vez identificadas esas fuerzas, queda la tarea de valorar su influencia en situaciones reales concretas. Si el modelo de localización de Hotelling ha tenido éxito, es porque de una manera muy sencilla pone de manifiesto una fuerza que esta presente en muchas situaciones reales (programas de partidos políticos, localización de las gasolineras a lo largo de una autopista, horarios de salida de distintos medios de transporte, programación cadenas de televisión,...).

[a] Hotelling, H. (1929). The stability of competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41-57.

Ejemplo 1.1.2 (Un juego cooperativo: modelo de emparejamientos estables de Gale-Shapley)

El premio nobel de Economía correspondiente al año 2012 se otorgó conjuntamente a los economistas matemáticos Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley «*for the theory of stable allocations and the practice of market design*»[a]. El ejemplo que proponemos aquí esta tomado de un artículo, publicado hace 50 años, del que Shapley es coautor y que es considerado como una de sus aportaciones más relevantes[b]. Los autores plantean una situación en la cual se desea formar parejas a partir de un conjunto de tres hombres α, β y γ y tres mujeres A, B y C, cuyas preferencias vienen recogidas en la siguiente matriz:

	A	B	C
α	1,3	2,2	3,1
β	3,1	1,3	2,2
γ	2,2	3,1	1,3

Figura 1.2. Matriz de preferencias del ejemplo de Gale-Shapley

De entre todas las posibles formas de emparejamiento, se plantean como objetivo la exis-

tencia e identificación de aquellas que sean *estables* y *óptimas* en un sentido que ellos mismos definen. Consideran un conjunto de emparejamientos *inestable* si, dadas las parejas formadas, existe al menos un hombre i y una mujer j que no están emparejados entre sí y, sin embargo, ambos preferirían al otro antes que a su actual pareja. Los autores demuestran en el artículo que siempre existe al menos una forma de emparejamientos que es estable y proponen un «*mecanismo de aceptación diferida*» que siempre permite seleccionar un conjunto de emparejamientos que que será estable. Este mecanismo se ha utilizado posteriormente para asignar médicos internos a hospitales, alumnos a colegios, deportistas a equipos, ... El mecanismo propuesto (fácilmente implementable en una aplicación informática) consistiría en proceder de la siguiente forma:

Paso 1: Cada hombre hace una petición de matrimonio a una mujer. Cada mujer acepta temporalmente la propuesta más preferida de entre todas las que le llegan.

Paso k: Cada hombre que no haya sido aceptado en la etapa anterior hace una propuesta a la mujer preferida de entre las que no lo hayan rechazado previamente.

Parada: El proceso finaliza cuando todos los hombres han visto aceptada una propuesta.

El mecanismo se puede aplicar de manera idéntica haciendo que sean las mujeres las que proponen primero. Los autores también demuestran que el emparejamiento seleccionado por su algoritmo será óptimo para la parte que realiza las propuestas, en el sentido de que cada uno de sus miembros estará al menos tan bien como lo estaría en cualquier otro emparejamiento estable. Se deja como ejercicio la determinación del conjunto de emparejamientos que sería seleccionado en cada caso para las preferencias recogidas en la Figura 1.2.

[a] El siguiente enlace proporciona información adicional sobre las aportaciones por las que les ha sido concedido el galardón:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/advanced-economicsciences2012.pdf .

[b] Gale, D. y Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematican Monthly*, *69*(1), 9-15.

1.1.3 Breve referencia histórica

Aunque detrás de muchos de los desarrollos actuales de la teoría de juegos se encuentran aportaciones que se remontan al siglo XVIII e incluso antes [1], el embrión de lo que es hoy en día la teoría de juegos comenzó a formarse en los años 20 del siglo pasado. De esta primera etapa destacan las contribuciones de los matemáticos Émile Borel (1871-1956) y John von Neumann (1903-57). Precisamente este autor, junto con el economista Oskar Morgens-

[1] Para una presentación esquemática puede consultar la página web *An Outline of the History of Game Theory*:http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm .

ter (1902-76), sentaron las bases para el posterior desarrollo de la disciplina con la publicación en 1944 de la obra *Theory of Games and Economic Behaviour*[2]. Poco después John F. Nash (1928-) realizó una serie de aportaciones que serían cruciales para el desarrollo posterior de la disciplina, en particular el concepto de equilibrio de Nash[3].

[2]Von Neumann y Morgenstern, 1944.

[3] Para ver la transcendencia del concepto de equilibrio de Nash en la historia de la teoría económica puede consultarse la siguiente referencia bibliográfica: Myerson, R. B. (1999). Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, *37*(3), 1067-1082.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.2 Juegos no cooperativos: estructura y formas de representación

1.2.1 Juegos no cooperativos: estructura y tipos

La formulación adecuada de un modelo en teoría de juegos bajo el enfoque no cooperativo requiere hacer explícitos los siguientes elementos:

1. **El conjunto de jugadores**. Supondremos que este conjunto es finito y que consta de n jugadores propiamente dichos y de un pseudojugador «0» al que nos referiremos como *la naturaleza*:
$$J = \{0, 1, 2, \cdots, n\}.$$
La inclusión de la naturaleza permite incorporar al modelo factores que influyen en el desarrollo del juego pero que no son controlables por ninguno de los jugadores. Un *movimiento* de la naturaleza consistirá en la realización de uno de los distintos *estados de la naturaleza posible*, cada uno de los cuales puede darse con una determinada probabilidad.

2. **Las reglas del juego**. Establecerán de manera precisa:
   - el orden en que ha de mover cada jugador, así como las acciones que estarán a su alcance y la información disponible cada vez que le toque mover.
   - la relación entre los posibles desarrollos del juego y los resultados obtenidos por cada jugador.

   La especificación adecuada de las reglas del juego constituye un elemento clave en la elaboración del modelo (del juego).

3. **Las preferencias de los jugadores en relación a los desarrollos posibles del juego**. Como se acaba desarrollando un juego depende de las decisiones del conjunto de jugadores (incluidos los *movimientos de la naturaleza*), por lo que indirectamente también supondrá la existencia de una relación de preferencias sobre las distintas combinaciones posibles de decisiones. Normalmente representaremos numéricamente dichas preferencias a través de una función que denominaremos *función de pagos*.

Tipos de juegos no cooperativos

La primera gran clasificación dentro de los juegos no cooperativos se hace a partir del tipo de información que tienen los jugadores sobre la estructura del juego (conjunto de jugadores, reglas del juego y preferencias de cada jugador). Se dice que un juego es de

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

información completa cuando la estructura del juego es **conocimiento común**[4]: todos los jugadores la conocen, todos saben que todos los jugadores la conocen, todos saben que todos saben que todos la conocen,. . . . Por oposición, se dice que un juego es de **información incompleta** cuando no se cumple alguna de las condiciones anteriores. La forma más habitual de incorporar la información incompleta es a partir de algún de tipo de imperfección que hace que las preferencias de los jugadores no sean conocimiento común (algún jugador no conoce la función de pagos del otro, algún jugador no sabe si los otros conocen su función de pagos,. . .).

Tomando de nuevo como referencia la información disponible por lo jugadores, pero en este caso en relación a los movimientos del resto de jugadores, se distingue entre juegos de **información perfecta** (cada jugador conoce perfectamente los movimientos previos de otros jugadores cada vez que le toca mover) y juegos de **información imperfecta** (algún jugador ha de realizar un movimiento sin conocer la elección de algún otro).

Como se verá en su momento, la denominada **transformación de Harsanyi** permite convertir los juegos de información incompleta en juegos de información imperfecta.

Además de las clasificaciones anteriores, asociadas a la información disponible por los jugadores, existen otras muchas entre las que cabe mencionar las siguientes:

- **Juegos de suma cero** (o estrictamente competitivos) frente a **juegos de suma no nula**. En los juegos de suma cero las ganancias de un agente son siempre a costa de las pérdidas del otro. Este tipo de juegos desempeño un papel fundamental en el desarrollo teórico inicial de la teoría de juegos, aunque poco a poco han ido perdiendo protagonismo debido a la mayor relevancia práctica de los juegos de suma no nula.

- **Juegos estáticos** frente a **juegos dinámicos**. En los juegos estáticos los jugadores eligen una sóla vez y de forma simultánea (constan de una sola etapa), por lo que se trata siempre de juegos con información imperfecta. Por el contrario, en los juegos dinámicos o multietápicos almenos un jugador acumula información sobre la decisión previa de otro u otros jugadores.

[4]Cuando determinada información es conocida por todas las partes se dice que es **conocimiento mutuo**. El conocimiento mutuo es una condición necesaria pero no suficiente para que se de el conocimiento común.

1.2.2 Formas de representación

De cara a facilitar el análisis teórico se recurre a dos formas de presentación de la información relativa a la estructura del juego (jugadores, reglas y funciones de pagos) conocidas respectivamente como *forma extensiva* y *forma normal* o *forma estratégica*.

La representación en forma extensiva

La representación en forma extensiva consiste en una descripción detallada de la estructura secuencial de la toma de decisiones por parte de los jugadores y se desarrolla a partir del concepto teórico conocido como *árbol del juego*[5]. En este tema nos limitamos a presentar de manera informal la representación en forma extensiva mediante algunos ejemplos, dejando para más adelante la definición formal de la misma.

Ejemplo 1.2.1 Votaciones estratégicas

Dos individuos I y II han de decidir cual de entre tres proyectos públicos, A, B ó C , se lleva a cabo. Las preferencias de los jugadores son: $A \succ_I B \succ_I C$; $\quad B \succ_{II} A \succ_{II} C$ y el procedimiento para la elección es el siguiente: cada individuo tiene el derecho a vetar uno de los proyectos, haciéndolo en primer lugar el I y a continuación el II.

La representación en forma extensiva de este juego aparece recogida en la Figura 1.3. El árbol del juego permite recoger toda la información concerniente a la estructura del juego:

- Quienes son los *jugadores* (encima de cada nodo aparece el nombre del jugador al que le toca elegir entre las *ramas* que salen del mismo).
- El *orden en el que mueven* (el I en el nodo raíz y el II a continuación), las *alternativas de que disponen* cada vez que les toca mover (las ramas que salen del nodo correspondiente) y la *información de que disponen cada vez que les toca mover* (el II tendrá que decidir sabiendo que proyecto a vetado el I).
- Las *preferencias* de los jugadores, esto es, su valoración de los posibles desarrollos del juego. En este caso, a cada uno de los seis posibles desarrollos (trayectorias posibles desde el nodo raíz hasta los nodos terminales) le hemos asociado un vector con dos componentes. El primero de ellos representa la valoración del jugador I y el segundo la del jugador II. Para representar numéricamente las preferencias de ambos jugadores hemos adoptado el convenio de asignar un 2 al proyecto más

[5] En matemáticas el concepto de árbol hace referencia a un tipo especial de *grafo* (un conjunto de nodos y un conjunto de ramas que establecen relaciones entre dichos nodos) en el que no existen ciclos ni nodos inconexos.

preferido, un 1 al segundo más preferido y un 0 al menos preferido.

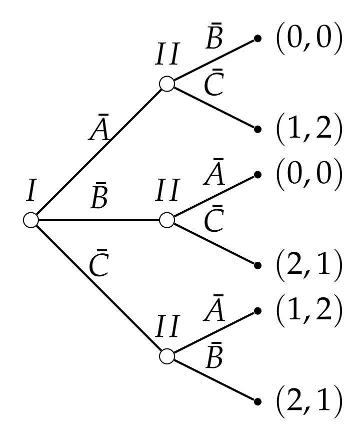


Figura 1.3. ***Votaciones estratégicas: el árbol del juego .***

Ejemplo 1.2.2

Dos individuos, I y II, se enfrentan al siguiente juego. Dada una baraja de 40 cartas, la mitad de las cuales son rojas y la otra mitad negra, el individuo I ha de elegir una de ellas al azar pudiendo mirar él su color pero no el jugador II. A continuación I tiene dos opciones:

1. Enseñar la carta. I recibirá 10 € de II si es roja, pero se los tendrá que pagar si es negra.
2. Hacer un *envite* doblando la apuesta. En este caso II tiene a su vez dos opciones:
   - Aceptar el envite, en cuyo I tendrá que darle 20 € si la carta es negra, pero será el quien tendrá que darle 20 € si es roja.
   - No aceptar el envite y pagar 10 € a I.

La representación en forma extensiva de este juego aparece recogida en la Figura 1.4. El juego empieza en el *nodo raíz* que en este caso es un *nodo de azar* ya que es la naturaleza la que elige entre dos estados posibles: color rojo o color negro. Cada uno de estos estados viene representado por una *rama* en la que se hace constar, además, la probabilidad del estado asociado. Al final de cada una de esas dos ramas aparece un *nodo de decisión* en el que es el jugador I el que decide si enseña la carta o hace un envite, opciones que aparecen representadas por las ramas L y $\bar{L}$. En el caso de que I elija L, sea cual sea el estado de la naturaleza, se acaba el juego. El *nodo terminal* asociado al desarrollo del juego RL recoge mediante un vector los pagos de los dos jugadores; el primer componente es el pago del jugador I y el segundo el del II. Lo mismo ocurre con el nodo terminal asociado al desarrollo NL aunque, lógicamente, los pagos son distintos. En el caso en

que uno decide hacer un envite, y sea cual sea de nuevo el movimiento de la naturaleza, aparece un nodo de decisión asociado al jugador II que ha de decidir si lo acepta o no. En cualquiera de los casos el juego termina y de nuevo aparecen los pagos asociados a los respectivos nodos terminales.

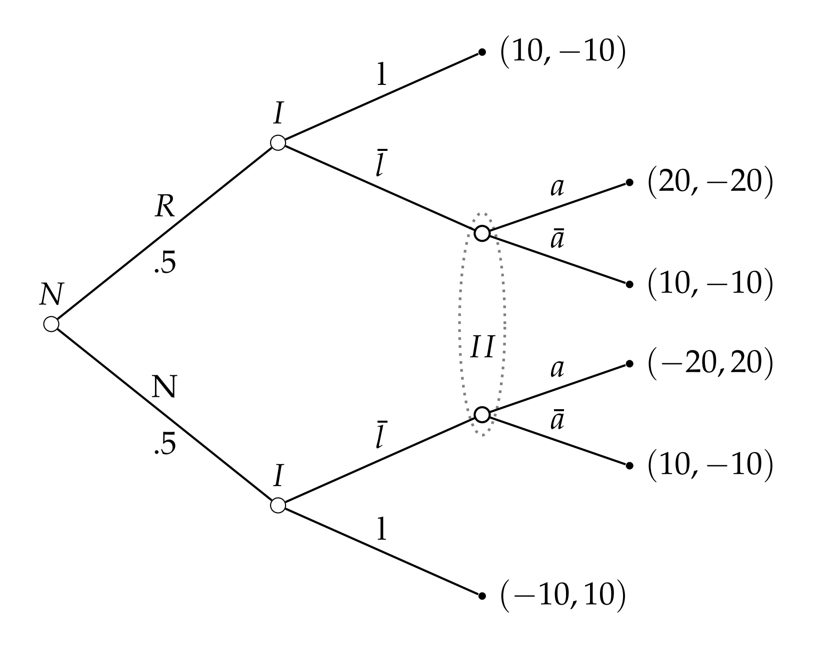


Figura 1.4. ***Árbol del juego para el Ejemplo 1.2.2 .***

Aunque pudiera parecer que ya esta descrita la estructura del juego, no es así ya que no se ha hecho explícita la información de que disponen los jugadores en el momento en que les toca mover. En concreto, el jugador II tendrá que tomar su decisión sin saber cual es el estado de la naturaleza. Para recoger esto se utiliza el concepto de *conjunto de información* que se corresponde con un conjunto de nodos con la propiedad de que el jugador al que pertenece dicho conjunto de información no sabe en cuál de ellos está. En la representación gráfica suele recogerse esa falta de información trazando una línea que englobe todos los nodos de un mismo conjunto de información. Los conjuntos de información de un jugador ofrecen una lista, desde el punto de vista del jugador a que corresponden, de todas las posibles situaciones o circunstancias en las que puede tener que tomar una decisión. En el ejemplo que estamos considerando el jugador II tiene un único conjunto de información que consta de dos nodos, lo que refleja la situación de que en el caso de que tenga que elegir no sabrá si la carta es roja o negra.

Definición 1.2.1 *Un juego es de* información perfecta *si todos los conjuntos de información constan de un único elemento. En caso contrario es de* información imperfecta*.*

La representación mediante el árbol del juego deja de ser práctica a medida que la estructura de los juegos se vuelve más compleja, aunque siempre resulta útil hacer un esbozo del mismo.

Ejemplo 1.2.3

A dos individuos se les ofrece la posibilidad de repartirse 10.000 *um* de acuerdo con el siguiente procedimiento. En primer lugar el individuo I hace una propuesta, si el II la acepta se lleva a cabo, en caso contrario se pierden 4.000 *um* y es el II el que hace una propuesta decidiendo el I si la acepta o no. Si la acepta se lleva a cabo y en caso contrario ninguno recibe nada.

La representación en forma normal o estratégica

Aunque la forma extensiva ofrece una descripción detallada de la situación de interdependencia estratégica, en muchas ocasiones resulta útil una descripción más compacta a partir de la denominada representación en forma normal o estratégica. La relación entre la forma extensiva y la forma estratégica queda establecida a partir del concepto de estrategia.

Definición 1.2.2 *Una **estrategia** para el jugador i es un plan de acción que le asigna un movimiento en cada una de las situaciones en las que le puede tocar mover, esto es, en cada uno de sus conjuntos de información.*

Dado este concepto de estrategia, un juego en forma extensiva admite una representación más compacta en la que únicamente es necesario hacer constar los siguientes elementos:

1. **El conjunto de jugadores**
2. **Los espacios de estrategias de cada uno de los jugadores**
3. **Las funciones de ganancias o pagos de cada jugador**

La representación en forma normal de un juego queda caracterizada por:

Esta representación se conoce como **forma normal o estrátegica** y nos referiremos a ella más formalmente como:

$$G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{N}, \{U_i\}_{i=1}^{N} \rangle \tag{1.1}$$

donde S_i es el espacio de estrategias del jugador i, y donde las funciones de ganancias asocian a cada posible combinación de estrategias $\mathbf{s}$ el pago que recibe el jugador correspondiente:

$$U_i : \quad \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$\mathbf{s} \mapsto U_i(\mathbf{s}).$$

La representación en forma normal recoge en la complejidad de las estrategias la falta de detalle que supone respecto a la representación en forma extensiva (orden en que mueven

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

los jugadores, información de que disponen,. . .). Sin embargo, para los denominados juegos estáticos, en los que los jugadores eligen una sola vez y lo hacen de manera simultánea, son muy sencillas: sólo recogerán un movimiento u acción para cada jugador ya que ninguno de ellos tendrá información alguna sobre las decisiones de los otros cuando le toque *mover*.

▶ Ejercicio 1.2.1

Represente en forma normal los siguientes juegos: *Papel, piedra o tijeras*, *Pares o nones* y *el Dilema del prisionero*.

1.2.3 Relación entre la forma estratégica y la forma extensiva

El concepto de estrategia permite pasar cualquier juego en forma extensiva a su forma estratégica. En cambio, dado un juego en forma estratégica no siempre existe una representación única en forma extensiva. En cualquier caso, lo natural es partir de la forma extensiva (constituye la representación más detallada de la situación de interdependencia estratégica) a la forma normal.

▶ Ejercicio 1.2.2

Represente en forma extensiva el juego *Papel, piedra o tijeras*.

▶ Ejercicio 1.2.3

Dado el juego en forma extensiva que aparece en la figura adjunta, determine el conjunto de estrategias de cada uno de los jugadores y represéntelo en forma normal.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

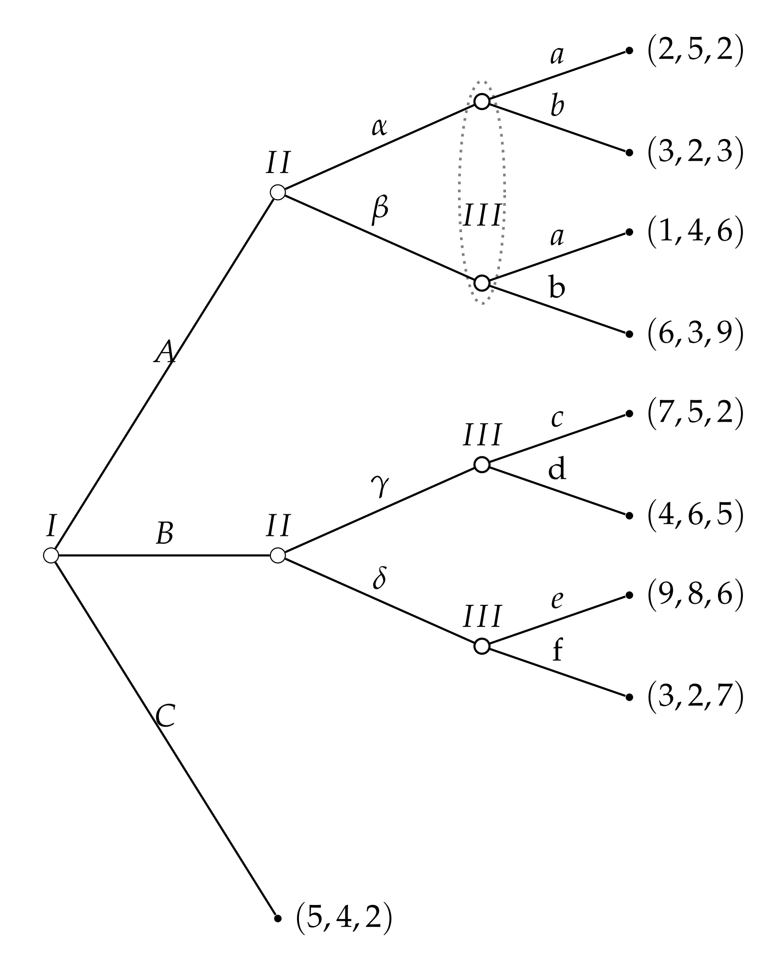


Figura 1.5. ***Juego en forma extensiva.***

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.3 De las preferencias a la elección: las funciones de pagos

Tanto en la en la representación en forma extensiva, como en la representación en forma estratégica, cada desarrollo posible del juego (cada combinación posible de estrategias) lleva asociado un vector de pagos. Hasta el momento nos hemos limitado a afirmar que dichos vectores recogen las preferencias de los jugadores en relación a los posibles desarrollos del juego, sin entrar en más detalles. Pasamos a preguntarnos ahora qué representan exactamente esos números y en qué medida es posible pasar de las preferencias de un jugador en relación a los posibles desarrollos del juego a sus preferencias en relación a sus estrategias disponibles (el objetivo último de un juego no cooperativo es la caracterización del comportamiento de los jugadores en términos de la selección de estrategias). Dado que un tratamiento general y detallado de estas cuestiones sobrepasa las posibilidades de este curso, hemos optado por abordarlas en el marco de un modelo sencillo con dos únicos jugadores, cada uno de ellos a su vez con dos únicas estrategias disponibles. Pensamos que ese marco es suficiente para poner de manifiesto la relevancia de los supuestos sobre las preferencias y sobre su representación a través de las funciones de pagos en el proceso de modelización de cualquier situación de interdependencia estratégica.

Un ejemplo sencillo

En la Figura 1.6 aparece representado un juego 2X2 (dos jugadores, cada uno de ellos con dos estrategias posibles). Dados los conjuntos de estrategias de los jugadores $S_I = \{a, b\}$ y $S_{II} = \{\alpha, \beta\}$, las posibles *combinaciones de estrategias* vendrán dadas por el producto cartesiano de los mismos:

$$S = S_I \times S_{II} = \{a\alpha, a\beta, b\alpha, b\beta\}.$$

Cada una de estas combinaciones de estrategias supone un desarrollo distinto del juego. Denominaremos D al conjunto de todos los desarrollos posibles del juego, el cual tendrá, por tanto, tantos elementos como combinaciones posibles de estrategias: $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. La correspondencia entre los elementos de S y los de D queda clara a partir de la Figura 1.6 .

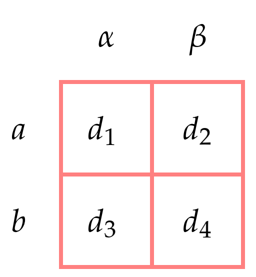
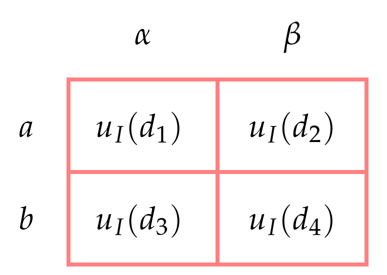


Figura 1.6. Desarrollos posibles para un juego 2X2

Nuestro objetivo último es analizar el comportamiento de los jugadores en términos de su decisión sobre la estrategia a escoger. Consideremos, por ejemplo, la situación del jugador I. Supongamos que nos dicen que inicialmente sólo conocemos sus preferencias en términos de la ordenación que hace de los cuatro posibles desarrollos del juego. En ese caso, al igual que hacíamos en la teoría del consumidor, podríamos recoger dichas preferencias mediante cualquier función $u_I(d)$ que asignase números que reflejasen dicha ordenación. De hecho, cualquier transformación monótona positiva de dicha función (cualquiera que ordene de la misma manera los cuatro desarrollos posibles del juego) también nos serviría para recoger esas mismas preferencias.



	α	β
a	$u_I(d_1)$	$u_I(d_2)$
b	$u_I(d_3)$	$u_I(d_4)$

Figura 1.7. Función de pagos del jugador I

¿Es posible determinar que estrategia elegirá I sólo a partir de esta información? La respuesta es que sólo bajo determinadas condiciones que podemos agrupar en dos grandes grupos:

Caso 1 Si una estrategia lleva a desarrollos del juego más preferidos que las otras estrategias con independencia de la estrategia del II. A modo de ejemplo, si I prefiere d_1 a d_3 y d_2 a d_4, su elección sería la estrategia a.

Caso 2 Si el jugador I «estuviese seguro» de la decisión del II. A modo de ejemplo, si I «esta seguro» de que II va a jugar α bastaría con saber si prefiere d_1 o d_3.

Si no se diesen ninguna de estas dos condiciones, conocer la ordenación que hace I de los desarrollos posibles del juego no es suficiente para determinar que estrategia elegirá. En efecto, a la hora de elegir I sabe que cada una de sus estrategias le lleva a un resultado distinto en función de la estrategia que elija II:

- Si elige a el juego se puede desarrollar conforme a d_1, si II elige α, o a d_2, si II elige β.
- Si elige b el juego se puede desarrollar conforme a d_3, si II elige α, o a d_4, si II elige β.

Dado que las consecuencias de sus decisiones dependen de lo que haga el otro, parece razonable considerar que además de la valoración que haga de los posibles desarrollos del juego, en su decisión influirán también **sus expectativas** sobre que estrategia elegirá el jugador II. Supongamos, sin entrar por el momento en su justificación, que podemos representar de manera general dichas expectativas mediante una distribución de probabilidad (una función que asigna probabilidades a cada una de las estrategias del jugador II). Al tener S_{II}

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

únicamente dos elementos, podemos representar dicha distribución de probabilidad mediante un vector $(p, 1-p)$, donde convenimos que p recoge la probabilidad que I asigna a que II elija α y, por tanto, $1-p$ la que asigna a que elija β. Por ser una distribución de probabilidad se ha de cumplir que $p \in [0, 1]$, recogiendo los extremos del intervalo el caso en que I «esta seguro» de cual será la decisión del II.

Una vez aceptamos la posibilidad de representar en términos de probabilidad las expectativas del jugador I, podemos plantear su elección entre estrategias como una elección entre distribuciones de probabilidad con soporte el conjunto de desarrollos posibles del juego (cada estrategia lleva asociados dos desarrollos posibles del juego, a cada uno de los cuales se le asigna una determinada probabilidad) a las que, siguiendo la práctica habitual, vamos a denominar *loterías*:

$$l_a = (d_1, d_2; p, 1-p);$$
$$l_b = (d_3, d_4; p, 1-p).$$

Lo ideal sería poder asignar un valor numérico a cada lotería $V_I(l)$ de tal forma que pudiésemos plantear el problema de decisión de I en términos de la elección de la estrategia para la que $V_I(l)$ toma un valor más alto. Como pone claramente de manifiesto la propia naturaleza de las loterías, el valor que tome $V(l)$ debería tener en cuenta dos tipos de factores:

1. Las preferencias del jugador I en relación a los desarrollos posibles del juego D.

2. Las expectativas del jugador I en relación a la ocurrencia de cada uno de esos desarrollos.

¿Será posible encontrar una función $V_I(l)$ que desempeñe ese papel? La respuesta a esta pregunta nos la da la conocida como *teoría de la utilidad esperada*. El análisis en profundidad de los contenidos y fundamentos de dicha teoría sobrepasa los objetivos de este curso y nos remitimos al tratamiento de la misma en cursos superiores. A pesar de ello, es necesario dejar constancia de que está detrás del procedimiento que seguiremos a la hora de caracterizar la toma de la decisiones por parte de los jugadores en nuestros modelos. A efectos prácticos, dicha teoría sostiene que bajo determinados supuestos en relación a las preferencias del jugador i sobre el conjunto de loterías que constituye su conjunto de elección, existirá una función que vamos denominar $u_i(d)$, la cual asigna un valor numérico a cada posible desarrollo del juego, y tal que permite plantear el problema de decisión del jugador en términos de la elección de la estrategia que le proporciona un mayor pago esperado[6].

[6]La función $u_i(d)$ se suele conocer como función de utilidad Bernoulli en reconocimiento a Daniel Bernoulli. Este autor fue el primero en proponer su uso en 1738, en el marco del problema de elección conocido como *la paradoja de San Petersburgo*. Detrás de la propuesta de Bernuilli está la idea de que lo relevante para los individuos a la hora de elegir en condiciones de incertidumbre es la «utilidad» de las posibles pérdidas y ganancias y no simplemente el valor monetario de las mismas.

Volviendo a la pregunta concreta que nos acabamos de plantear, bajo determinados supuestos sobre las preferencias de I en relación a las loterías, si existe esa función $V_I(l)$ y, además, adoptará la siguiente forma para cada una de sus estrategias:

$$V(l_a) = pu_I(d_1) + (1-p)u_I(d_2);$$
$$V(l_b) = pu_I(d_3) + (1-p)u_I(d_4).$$

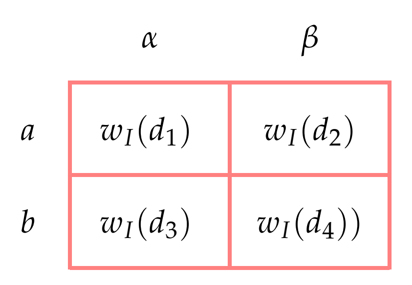
En este caso, por tanto, los números que asignan nuestras funciones de pagos, han de ser tales que nos permitan plantear la elección de un jugador entre sus estrategias en términos de la maximización del pago esperado (la esperanza matemática de los pagos a los que puede llevar dicha estrategia de acuerdo con las expectativas del jugador).

Resumiendo lo visto hasta ahora, la práctica habitual será que, tanto en la representación en forma extensiva como en la representación en forma estratégica, a cada desarrollo posible del juego le asignemos un vector de pagos, siendo el conjunto de dichos vectores los que recogen las preferencias de los jugadores. Sin embargo, los números que asocian las funciones de pagos a los desarrollos posibles del juego pueden tener una naturaleza muy diferente de unos modelos a otros. En algunos casos será suficiente con conocer la ordenación que hacen los jugadores de los posibles desarrollos del juego, en cuyo caso las funciones de pagos tendrán un carácter ordinal y los números asociados a cada desarrollo posible del juego debemos interpretarlos en esos términos. En otros, sin embargo, conocer la ordenación no será suficiente y supondremos que las preferencias de los jugadores son tales que podemos plantear su elección en términos de la maximización del pago esperado. En este segundo caso los números asignados a cada desarrollo posible del juego representan «algo más» que la mera ordenación de dichos desarrollos de acuerdo con las preferencias de los jugadores. Para entender que significa ese algo más, resulta útil considerar el caso en el que cada desarrollo posible del juego lleva asociada una valoración en términos monetarios por parte de cada jugador, algo habitual en el caso de las aplicaciones de la teoría de juegos a la economía.

Pagos en unidades monetarias y teoría de la utilidad esperada

Sin dejar aún nuestro ejemplo de referencia, consideremos la posibilidad de lo que conocemos es la valoración monetaria que hace cada jugador de cada uno de los posibles desarrollos del juego. Pensemos, por ejemplo, que nuestros jugadores son empresas y que conocemos cuales serán los beneficios de cada empresa en función de la estrategia que elija ella y la que elija su rival. Centrándonos de nuevo en el problema de decisión del jugador I, denominemos $w(d)$ a la función que asigna la valoración monetaria que hace el jugador de cada posible desarrollo del juego tal y como aparece recogido en la Figura 1.8.

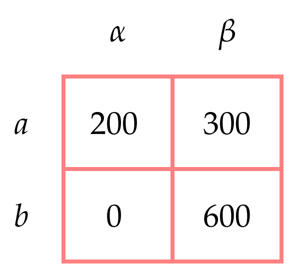
Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria



	α	β
a	$w_I(d_1)$	$w_I(d_2)$
b	$w_I(d_3)$	$w_I(d_4))$

Figura 1.8. Función de pagos en unidades monetarias

Desde luego $w_I(d)$ ordena las preferencias de un agente racional en relación con los posibles desarrollos del juego (simplemente con que supongamos que prefiere ganar más a ganar menos). Sin embargo, esta información no es suficiente cuando cada estrategia no lleva asociada un pago cierto sino una lotería. Consideremos, a modo de ejemplo, la situación recogida en la Figura 1.9 bajo el supuesto de que los pagos vienen dados en euros.



	α	β
a	200	300
b	0	600

Figura 1.9. Pagos en unidades monetarias: un ejemplo

La elección de una de sus dos estrategias por parte del jugador I la podemos ver como un problema de elección entre las siguientes loterías:

$$l_a = (200, 300; p, 1 - p);$$
$$l_b = (0, 600; p, 1 - p).$$

La pregunta que nos hacemos es si podemos establecer como criterio de decisión que el jugador I elegirá la estrategia con una mayor ganancia monetaria esperada. En otras palabras, ¿podemos asociar el comportamiento racional de un jugador en condiciones de incertidumbre a la maximización de la ganancia monetaria esperada? Para llegar a la respuesta de esta pregunta puede servirnos de ayuda considerar unas expectativas concretas. Supongamos, por ejemplo, que $p = \frac{1}{2}$, debido a que sabe con certeza que el II

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

decidirá lanzando una moneda no trucada al aire. En este caso las loterías entre las que tiene que elegir I serían:

$$l_a = (200, 300; \frac{1}{2}, \frac{1}{2});$$
$$l_b = (0, 600; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Dado que el pago esperado de l_b es de 300 €, $[E_b(w) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}600 = 300]$ y la de l_a es de 250 €, $[E_a(w) = \frac{1}{2}200 + \frac{1}{2}300 = 250]$ la pregunta que nos estamos planteando es si deberíamos considerar irracional que I eligiese la estrategia a. Suponga, por ejemplo que a uno de sus compañeros de clase se le ofrece participar en este juego y que opta por la estrategia a haciendo el siguiente razonamiento: «Es cierto que b tiene un mayor ganancia esperada, pero también es verdad que mientras que con a me garantizo por lo menos 200 €, con b hay una probabilidad del 50 % de que no gane nada.» Ciertamente lo que esta planteando su compañero, es que cuando un agente tiene que decidir en condiciones de incertidumbre tiene en cuenta algo más que el pago esperado. En este caso podríamos decir que su compañero presenta *aversión al riesgo* e incluso plantearnos la medición del riesgo presente en cada una de las loterías a partir de la varianza de cada una ellas. El mayor riesgo que presenta la lotería b no se ve compensado por la mayor ganancia esperada y, por tanto, el jugador elige su estrategia a.

De nuevo la teoría de la utilidad esperada viene en nuestro auxilio: bajo determinados supuestos sobre las preferencias del individuo en relación a las loterías, existirá una función $u(w)$ tal que que podemos plantear el problema de decisión de un agente racional en términos de un problema de maximización de la utilidad esperada. En nuestro ejemplo, la función $u(w)$ asignará valores a las ganancias monetarias de tal forma que podremos determinar la estrategia preferida por I comparando el valor esperado para cada una de ellas:

$$V(l_a) = \frac{1}{2}u(200) + \frac{1}{2}u(300);$$
$$V(l_b) = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(600).$$

Se dice que un agente económico es neutral al riesgo cuando ordena las distintas loterías teniendo en cuenta únicamente la ganancia monetaria esperada de cada una de ellas. En este caso no habría ningún problema en que los números que aparecen en nuestros vectores de pagos fuesen directamente las ganancias monetarias de cada jugador. Sin embargo, las preferencias de los agentes en relación a las loterías dependen en muchas

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ocasiones, no sólo de la ganancia esperada, sino también de otros factores como el riesgo. En este caso, los números que aparecen en nuestros vectores de pagos deben corresponderse con valores de una función $u(w)$ que nos permita utilizar el criterio de la utilidad esperada.

A modo de conclusión

El objetivo último de un juego no cooperativo es analizar el comportamiento de los jugadores en términos de la elección entre sus estrategias. Aunque en muchas ocasiones tomaremos los pagos que recogen las preferencias de los jugadores como un dato, una reflexión sobre la naturaleza de los mismos resulta imprescindible para la comprensión de cualquier modelo. En algunos juegos podremos abordar el comportamiento de los jugadores partiendo únicamente de la ordenación que éstos hacen de los posibles desarrollos del juego. En este caso, los números que asigna cada función de pagos contendrán únicamente información de carácter ordinal sobre las preferencias del jugador en relación con los posibles desarrollos del juego. Sin embargo, en muchos otros juegos cada estrategia de un jugador no irá asociada con un único desarrollo del juego, por lo que debemos plantear su problema de decisión en términos de la elección entre loterías (distribuciones de probabilidad con soporte los posibles desarrollos del juego). En este caso, debemos distinguir dos grandes grupos de determinantes de su elección:

1. sus preferencias en relación a los distintos desarrollos posibles del juego;
2. sus creencias o expectativas sobré lo que harán los otros jugadores.

La manera habitual de proceder en este segundo caso consiste en dar los siguientes pasos:

1. suponer que las expectativas de un jugador pueden representarse mediante una distribución de probabilidad;
2. suponer que sus preferencias en relación a las loterías asociadas a cada una de sus estrategias son tales que podemos plantear su problema de decisión en términos de la maximización del pago esperado (bien porque es neutral al riesgo y los pagos vienen dados en unidades monetarias, bien porque los pagos vienen dados directamente en valores de una función de utilidad tipo Bernoulli).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.4 Ejercicios

▶ Ejercicio 1.4.1

Intente dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas relacionadas con distintas situaciones de interdependencia estratégica:

1. ¿Qué razones pueden justificar que alguien «queme sus naves»?
2. ? Cómo afecta a la prima que cobran las compañías de seguro la franquicia que asume el cliente? ¿Por qué?
3. ¿Por qué cuando se hace una oferta en la que se dice que el precio es bajo suele ir acompañada de una explicación (por cierre, reforma,. . .)?
4. ¿Dónde esperarías encontrar un menú del día con una mejor relación calidad precio, en un bar de un polígono industrial o una estación de trenes o autobuses?¿Por qué?
5. ¿Se vota siempre la alternativa «más preferida»?

▶ Ejercicio 1.4.2

Considere la misma situación del Ejemplo 1.1.2 pero con cuatro mujeres y cuatro hombres y las preferencias recogidas en la tabla adjunta. Aaplique el algoritmo de «aceptación diferida» de Gale-Shapley para determinar el conjunto de emparejamientos estables en los siguientes casos:

1. cuando son los hombres los que proponen;
2. cuando son las mujeres las que proponen.

	A	B	C	D
α	1,3	2,3	3,2	4,3
β	1,4	4,1	3,3	2,2
γ	2,2	1,4	3,4	4,1
δ	4,1	2,2	3,1	1,4

▶ Ejercicio 1.4.3

Considere el modelo de localización espacial de Hotelling del Ejemplo 1.1.1. Suponga ahora que las empresas ya están localizadas en los dos extremos de la ciudad y que siguen vendiendo un producto homogéneo que requiere un transporte especializado que realizan ellas mismas. Si las empresas fijan un precio en destino; transporte incluído,

¿en qué parte de la ciudad será mayor la competencia entre las empresas? ¿Cómo cree que variarán los precios netos (descontado el coste del tranporte) a lo largo de la ciudad?

▶ Ejercicio 1.4.4

Dos individuos, I y II, se enfrentan al siguiente juego. Dada una baraja de 40 cartas, la mitad de las cuales son rojas y la otra mitad negra, a cada uno de los individuos se les da una carta elegida al azar pudiendo cada jugador ver únicamente el color de la suya. El individuo I tiene que decidir a continuación entre dos opciones:

1. *Cartas arriba*. En ese caso si un jugador tiene una carta de color rojo y el otro una de color negro, este último deberá pagarla 10 € al otro (rojo gana). En caso de que las dos sean del mismo color ninguno paga nada.
2. Hacer un *envite* doblando la apuesta. En este caso II tiene a su vez dos opciones:
   - Aceptar el envite, en cuyo caso si son de distinto color ganará la roja recibiendo el jugador correspondiente 20 € mientras que si son del mismo color ninguno recibe nada.
   - No aceptar el envite, en cuyo caso deberá pagar 10 € a I.

▶ Ejercicio 1.4.5

Represente en forma extensiva todas las posibles situaciones informativas que se pueden dar en un juego 3X2(tres jugadores cada uno de ellos con 2 estrategias posibles).

▶ Ejercicio 1.4.6

Un determinado mercado es abastecido por dos únicas empresas en las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$D: \quad p = 100 - X; \quad X = x_1 + x_2$$

$$C: \quad CT_i(x_i) = 2x_i, \quad i = 1, 2.$$

Suponga que cada una de las empresas ha de decidir la cantidad de producto que saca al mercado y haga un esbozo de la forma extensiva del juego para los siguientes marcos estratégicos:

1. La empresa 2 se comporta como seguidora en el sentido de que espera a conocer

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

cuanto saca al mercado la 1 (la líder) antes de decidir cuanto saca ella.

2. Ambas empresas han de decidir de manera simultánea cuanto sacan al mercado.

▶ Ejercicio 1.4.7

Haga la representación en forma normal del juego del Ejemplo 1.2.1 y del juego del Ejemplo 1.2.2.

▶ Ejercicio 1.4.8

Haga la representación en forma normal de los modelos de oligopolio de Cournot y Stackelberg.

▶ Ejercicio 1.4.9

Represente el *dilema del prisionero* en forma extensiva.

▶ Ejercicio 1.4.10 La paradoja de San Petersburgo

Suponga que le ofrecen participar en el siguiente juego. Se lanza una moneda al aire hasta que salga la primera cruz asignándole un premio de $2^n * 10$ € , donde n es el número de la tirada donde aparace la primera cruz.

1. ¿Cuál es la esperanza matemática o ganancia esperada de participar en este juego?
2. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por participar en este juego?

▶ Ejercicio 1.4.11

Considere el juego representado en la Figura 1.10 y plantee la decisión de cada uno de los jugadores como un problema de elección entre loterías.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$20,7$	$10,5$
s_{I2}	$-10,5$	$40,9$

Figura 1.10

▶ Ejercicio 1.4.12

Se lanza una moneda al aire, si sale cara se le pagan 100 €, pero si sale cruz es usted quien tiene que pagar 80 €.

1. ¿Cual es la esperanza matemática de este juego?
2. ¿Participaría en el mismo si le ofreciesen esa posibilidad?
3. Si un casino ofreciese la participación en este juego tantas veces como se quiera, ¿tendría clientes para dicho juego?
4. Valore globalmente la respuesta a los apartados anteriores

▶ Ejercicio 1.4.13

Considere el problema de elección del jugador *I* recogido en la figura adjunta y explique bajo que supuestos podríamos determinar la elección de dicho jugador a partir del pago esperado para cada una de sus estrategias.

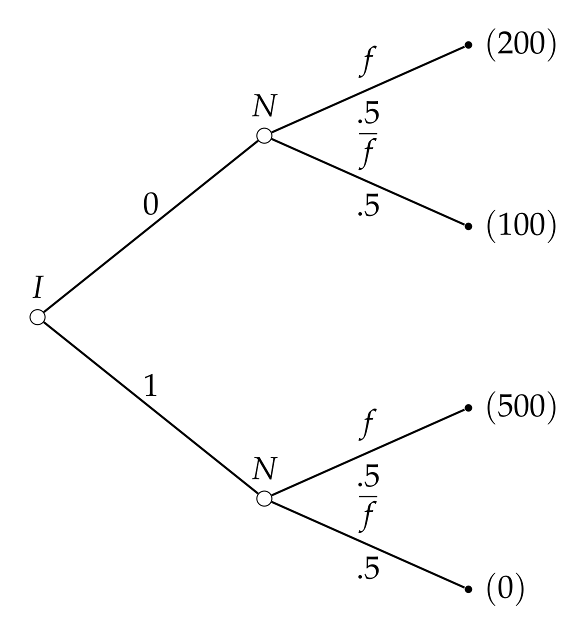


Figura 1.11. *Decisión con incertidumbre.*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Bibliografía

Gale, D. & Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematican Monthly*, *69*(1), 9-15.

Hotelling, H. (1929). The stability of competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41-57.

Myerson, R. B. (1999). Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, *37*(3), 1067-1082.

Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. New York:Wiley.





Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 2

Juegos estáticos (I)

Dominancia y racionalizabilidad

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.1 Introducción

En el tema anterior hemos visto que la forma de trabajar en la teoría de juegos es mediante la elaboración y manejo de un tipo especial de modelos denominados juegos. Presentamos la forma normal o estratégica y la forma extensiva como alternativas para representar un juego no cooperativo, e hicimos una primera aproximación a la naturaleza de la las funciones de pagos y su papel en ese proceso de modelización. En este tema vamos a entrar ya en el análisis de un tipo especial de situaciones de interdependencia estratégica, aquellas en las que los jugadores tienen que decidir de manera simultánea, en el sentido de que cada uno de ellos a la hora de elegir entre sus estrategias no conocerá la elección del otro. Los modelos relacionados con este tipo de situaciones se denominan juegos estáticos o simultáneos. Por oposición a ellos, en los denominados juegos dinámicos al menos un jugador dispondrá de información, en el momento de decidir, sobre el movimiento o movimientos previos de otros jugadores. Nos limitaremos, por el momento, a los denominados juegos estáticos con información completa, en los cuales se supone que la estructura del juego (las reglas y las funciones de ganancias) es conocimiento común.

► Ejercicio 2.1.1

¿El *juego de los chinos* es estático o dinámico? ¿Bajo que condiciones pasaría a ser estático?

En este tipo de juegos las estrategias de los jugadores son muy sencillas (constan de un solo movimiento o acción) por lo que resulta natural partir directamente de la representación en forma normal o estratégica. Como vimos en el tema anterior, dicha forma normal queda caracterizada, además de por el conjunto de jugadores, por los *espacios de estrategias* y las *funciones de ganancias* de cada uno de ellos:

$$\boxed{G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{U_i\}_{i=1}^{n} \rangle.} \tag{2.1}$$

El hecho de que los jugadores se enfrenten una sola vez, hace que al tomar sus decisiones no estén pendientes de las consecuencias futuras de sus acciones. Al decidir de forma simultánea, la preocupación fundamental de cada jugador será *la formación de unas expectativas correctas* sobre el comportamiento del resto de jugadores. Como ejemplos de este tipo de situaciones podemos considerar las subastas de sobre cerrado, determinados sistema de votación, . . . Hemos de tener en cuenta, además, que las herramientas que desarrollemos en este marco nos serán útiles cuando consideremos situaciones estratégicas más ricas (en las que si se considere la influencia de la *sombra del futuro*, no exista simultaneidad en la toma de decisiones, la información sea incompleta,. . .).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Una vez tenemos representado un juego en su forma normal, el objetivo del modelo es tratar caracterizar el comportamiento de los jugadores en términos de su elección entre las estrategias de que disponen[1]. El punto de partida es el supuesto de que se comportan de manera *racional*, esto es, eligen entre sus estrategias de acuerdo con sus objetivos (recogidos en el modelo a través de las funciones de pagos) y la información de que disponen (por ser juegos de información completa la estructura del juego es conocimiento común). Comenzaremos viendo que en algunos casos el supuesto de racionalidad es suficiente para descartar la elección por parte de un jugador de determinadas estrategias: aquellas que no constituyan la *mejor respuesta* bajo ninguna de las expectativas posibles que se pueda formar el jugador sobre el comportamiento del resto. La estrecha interrelación entre la elección de un jugador y sus expectativas sobre lo que harán el resto de jugadores, hace que sean estás el centro de atención en la segunda parte del tema. Podríamos decir que el hilo conductor de este tema es tratar de descubrir *qué no harán* y *qué no creerán* los jugadores en el marco de un juego estático con información completa cuando la racionalidad de cada uno de ellos es conocimiento común.

[1]Cuando, de acuerdo con algún criterio, se propone una determinada combinación de estrategias como desarrollo de un juego, dicha combinación de estrategias se conoce como *solución del juego*.

2.2 Estrategias dominadas

2.2.1 Jugadores racionales no juegan estrategias dominadas

En el intento de caracterizar el comportamiento de los jugadores, vamos a comenzar por preguntarnos si existen algunas estrategias que podamos descartar como elecciones posibles de un jugador racional. En esta aproximación gradual al proceso de selección de estrategias, descartaremos inicialmente que un jugador elija una determinada estrategia si dispone de otra que le reporte mayores pagos con independencia de lo que hagan los otros jugadores. En términos más técnicos, diremos que los jugadores racionales no elegirán nunca estrategias que estén *estrictamente dominadas*.

	L	**C**	**D**
A	7, 5	3, 4	2, 6
M	8, 7	6, 2	5, 1
B	9, 4	1, 2	4, 5

Figura 2.1. Un juego con estrategias dominadas

En el juego de la Figura 2.1 para el jugador I la estrategia A esta dominada por la estrategia M y para el jugador II la estrategia C esta dominada por la estrategia L. Parece lógico proponer, por tanto, que I nunca jugará A y que II nunca jugará C. Reducimos, por tanto, los desarrollos del juego posibles entre jugadores racionales a los cuatro que aparecen recogidos en la Figura 2.2.

	L	**D**
M	8, 7	5, 1
B	9, 4	4, 5

Figura 2.2. Versión reducida del juego de la Figura 2.1

Definición 2.2.1 (Estrategia estrictamente dominada) *Dado* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$, *la estrategia* $\bar{s}_i$ *es una estrategia (estrictamente) dominada para el jugador i si y sólo si existe otra estrategia* $\bar{\bar{s}}_i : U_i(\bar{\bar{s}}_i, s_{-i}) > U_i(\bar{s}_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.2.2 Solución por dominancia estricta: el *dilema del prisionero*

La eliminación de las estrategias dominadas nos llevará normalmente a un juego más sencillo, en el que se habrá reducido el número de combinaciones de estrategias que son candidatas a solución del mismo. Cabe pensar en un caso extremo en el cuál una de las estrategias de un jugador le de mejores resultados que todas las demás a su alcance, con independencia de lo que hagan los demás jugadores. En este caso se dice que el jugador tiene una estrategia (estrictamente) *dominante*.

Definición 2.2.2 (Estrategia estrictamente dominante) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$, la estrategia $\tilde{s}_i$ es unaestrategia (estrictamente) dominante para i si y sólo si:*

$$U_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > U_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \; \forall s_{-i} \; \in S_i.$$

Si cada jugador tiene una estrategia que le da mejores resultados que las otras, hagan lo que hagan el resto de jugadores, parece poco discutible proponer esa combinación de estrategias como solución del juego. En este caso, el supuesto de racionalidad de los jugadores es suficiente para proponer un primer concepto de solución.

Definición 2.2.3 (Solución por dominancia) *Dado un juego estático en forma normal G, si existe una estrategia estrictamente dominante $\tilde{s}_i$ para cada uno de los jugadores, la combinación de estrategias $\tilde{\mathbf{s}}$ constituye la solución por dominancia del juego.*

La solución por dominancia ni siquiera requiere que los jugadores tengan en cuentan las expectativas sobre lo que harán los otros, algo poco frecuente en las situaciones de interdependencia estratégica. Sin embargo, en este marco, tan poco estratégico, nos encontramos con uno de los modelos más conocidos y relevantes de la teoría de juegos: el *dilema del prisionero*.

El *dilema del prisionero*

El *dilema del prisionero* constituye, sin duda, el modelo más conocido de la teoría de juegos. El problema estratégico que representa fue analizado por primera vez en 1950 por los matemáticos Merrill Flood y Melvin Dresher, en el ámbito de la organización RAND. El nombre y la historia asociada al mismo fueron inventados por el también matemático Albert Tucker, consejero de esa misma organización, como forma de hacer el modelo más accesible a todo tipo de público. La historia que propuso es la siguiente:

> Dos individuos son detenidos como sospechosos de haber cometido un delito grave. No existen pruebas suficientes para condenarlos, pero la policía intenta que se inculpen mutuamente. Para ello, tras incomunicarlos poniéndolos en celdas separadas, les proponen que firmen un papel involucrando a su compañero. Los agentes le explican a cada preso su situación, la cual viene a ser la siguiente:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

- si delata a su compañero y el otro no lo delata a él, será puesto en libertad, ya que no habrá pruebas que lo involucren y le premiarán por colaboración con la justicia;
- si delata a su compañero y éste también lo delata a él, ambos serán condenados por el delito grave, pero verán rebajada su condena por colaboración con la justicia;
- si no delata a su compañero, pero éste sí le delata a él, le caerá la pena máxima, sin que se vea reducida por colaboración con la justicia;
- si ninguno de los dos delata al otro, no habrá pruebas para condenarlos por el delito grave, pero si les podrán condenar por otros delitos menores para lo que si disponen de pruebas.

Cada jugador dispone, por tanto, de dos estrategias posibles, delatar (D) o no delatar ($\bar{D}$), y sus preferencias sobre los desarrollos posibles del juego son de la forma:

$$(D_i, \bar{D}_j) \succ_i (\bar{D}_i, \bar{D}_j) \succ_i (D_i, D_j) \succ_i (\bar{D}_i, D_j).$$

Para unos valores concretos de las funciones de pagos que mantengan esta ordenación de los desarrollos posibles del juego , podemos representar dicha situación mediante la siguiente matriz:



	$\bar{\mathbf{D}}$	$\mathbf{D}$
$\bar{\mathbf{D}}$	8, 8	0, 10
$\mathbf{D}$	10, 0	2, 2

Figura 2.3. Una posible matriz de pagos para el *dilema del prisionero*

¿Qué estrategia cabe esperar que adopten los jugadores en esta situación? Sea cual sea la expectativa de cada uno de ellos sobre el comportamiento del otro, la mejor alternativa que tiene es D [2]. La paradoja «social» radica en que cuando cada uno de ellos elige, racionalmente, su estrategia dominante D, ambos acaban en una situación peor que si eligiesen su estrategia dominada $\bar{D}$. La situación de fondo asociada a las situaciones tipo dilema del prisionero refleja la existencia de ventajas derivadas de la cooperación mutua, si bien cada uno de los agentes tiene un incentivo a desviarse (a no asumir el coste de la cooperación). Debido

[2] Bajo los supuestos de información completa y conocimiento común de la racionalidad, la expectativa sobre el comportamiento del rival debería ser que también elegirá D.

a ello, también es habitual presentar la elección de los jugadores en términos de «cooperar» o «no cooperar», algo que haremos habitualmente a lo largo del curso.

▶ Ejercicio 2.2.1

Haga una representación de una situación tipo *dilema del prisionero* cambiando el nombre de las estrategias de los jugadores a C (cooperar) y $\bar{C}$ (no cooperar) y con unas funciones de pagos distintas. Explique a continuación que condición han de cumplir los pagos para que estemos ante una situación tipo *dilema del prisionero*.

La trascendencia de esta situación estratégica se deriva de que se observa con mucha frecuencia en distintos ámbitos de la realidad social (carrera de armamentos, relaciones comerciales entre países, política fiscal de las CCAA, acuerdos colusivos entre empresas, ...).

Es importante darse cuenta de que los propios jugadores tienen incentivos para crear mecanismos e instituciones que cambien la estructura del juego (las reglas o incluso las funciones de ganancias) de forma que se alcance la cooperación entre las partes [3]. Sin embargo, contrariamente a lo que ocurre desde el punto de vista de las partes implicadas, los resultados derivados de una situación tipo dilema del prisionero no tienen porque ser «malos» desde el punto de vista de terceras partes (el hecho de que las empresas no lleguen a acuerdos colusivos conduce a un mayor bienestar social, una empresa puede inducir una mayor productividad entre sus trabajadores haciendo que se enfrenten a situaciones de este tipo ...). En consecuencia, esas terceras partes tendrán incentivos para diseñar mecanismos e instituciones que las provoquen (la política de defensa de la competencia, el diseño de un *torneo* entre sus trabajadores por parte de una empresa, ...).

■ Ejemplo 2.2.1 ¿ A setas: hoy o mañana?

Las recientes lluvias han hecho que la primeras setas aparezcan en el bosque. Aunque cada uno de los «seteros» de una pequeña localidad sabe que lo ideal sería esperar un día más para que se desarrollasen plenamente, cada uno de ellos está con la cesta preparada al amanecer. Vamos a representar esta situación de interdependencia estratégica mediante un juego. Supongamos inicialmente que sólo hay dos jugadores, que las setas disponibles tienen un determinado valor, y que éste será mayor si esperan a mañana que si las recogen hoy. Suponemos también que cada jugador tiene que decidir si va hoy o si espera a mañana, sabiendo que si van los dos el mismo día cada uno se llevará la

[3] Los cambios en las reglas pueden lograrse haciendo que el futuro sea importante (una probabilidad alta de volverse a encontrar en la misma situación puede hacer que la estrategia óptima pase por cooperar en el presente), haciendo que sean posibles los acuerdos vinculantes recurriendo a una tercera parte, ... Los «pagos» de los jugadores pueden verse influidos incluso por los principios éticos o los valores religiosos de las distintas sociedades.)

mitad, mientras que si va uno sólo se las lleva él todas. Bajo estos supuestos, podemos representar esta situación de interdependencia estratégica mediante la siguiente matriz:

	H	M
H	10, 10	20, 0
M	0, 20	15, 15

Figura 2.4. A setas, ¿hoy o mañana?

Dado que la estrategia H es una estrategia dominante para cada uno de los jugadores, (H, H) constituye la solución del juego por dominancia estricta. Haga lo que haga el otro jugador, cada uno de ellos obtendrá un mejor resultado si va hoy que si decide esperar a mañana, por lo que cabe esperar que ambos decidan ir hoy, sin ni siquiera pararse a pensar que hará el otro. Sin embargo, resulta inmediato darse cuenta de que si ambos jugadores se pusiesen de acuerdo y decidiesen aplazar un día más la recolección, los dos acabarían mejor.

Incluso un modelo tan sencillo como éste nos permite poner de manifiesto un resultado enormemente trascendente: *en determinadas situaciones de interdependencia estratégica, si los jugadores se guían por sus intereses individuales, todos acaban peor que si tuviesen en cuenta el interés colectivo*. Si se pusiesen de acuerdo y eligiesen cada uno de ellos su estrategia dominada, los dos acabarían mejor que si eligen guiados únicamente por el interés individual.

¿Nos ayuda el modelo a explicar lo que ocurre en alguna situación real de interdependencia estratégica? ¿No parece razonable que los jugadores se pongan de acuerdo y elijan M? La respuesta a estas preguntas requiere tener presente que nuestro análisis se lleva a cabo en el marco de un modelo con unos supuestos concretos. En particular nuestras reglas del juego establecen que los jugadores se «enfrentan» a esa decisión una sóla vez y que ésto es conocimiento común. Lo que nos dice el modelo es que si dos individuos que no se conocen y saben con certeza que no se van a ver en el futuro tienen que decidir, el interés individual les llevará a coger la cesta inmediatamente. Si la situación del mundo real que pretendemos analizar no es esta (los individuos pueden ponerse de acuerdo de forma creíble, el Ayuntamiento puede fijar periodos de recolección,. . .) debemos esperar un poco más para utilizar modelos más complejos que permitan recoger situaciones de interdependencia estratégica más ricas. Evidentemente, existe esa fuer-

za que induce al acuerdo entre los jugadores, pero ésta no resulta sencilla de canalizar: ¿bastará con que hablen entre ellos?; ¿tendrán que vigilarse el uno al otro durante todo el día?; ¿será necesario (y posible) que firmen un contrato y los vigile un tercero?; ¿bastará con que el Ayuntamiento utilice su autoridad y fije cuando se puede ir?; ... Quizás poner en práctica cualquiera de estas alternativas tenga un coste demasiado alto en relación a las ganancias derivadas de conseguir retrasar un día más la recolección.

En resumen, el modelo nos permite sacar una doble conclusión:

1. En determinados marcos estratégicos la elección racional por parte de los jugadores lleva a situaciones que no son óptimos paretianos (todos podrían mejorar si se coordinasen y eligiesen una estrategia que no es óptima desde el punto de vista individual).

2. El hecho de que la situación de equilibrio no sea un óptimo paretiano hace que las propias partes tengan interés en cambiar las reglas del juego, pero dicho cambio puede ser costoso o imposible.

► **Ejercicio 2.2.2** **Provisión de bienes públicos a partir de contribuciones voluntarias: el problema del *free rider***

Se conoce como *problema del free rider* o *problema del polizón*, una situación en la cuál los individuos tienen una tentación individual a aprovecharse de la aportación de otros para sufragar el coste de bienes colectivos de cuyo disfrute no pueden ser excluidos (bienes públicos). En este ejercicio se propone un modelo sencillo que reproduce dicha situación.

Cuatro individuos disponen de 100 € cada uno de ellos, teniendo que decidir que cantidad asignar a un fondo privado y que cantidad a un fondo público. Las asignaciones a este último son anónimas y el total asignado se multiplicará por cuatro, dividiéndose a continuación a partes iguales entre todos los individuos. En cuanto al fondo privado, por cada euro que asigne su dueño recibirá dos euros. Se pide:

1. Haga la representación en forma normal.

2. Determine la solución por dominancia estricta de este juego.

3. Determine la combinación de estrategias *Pareto óptima*.

4. Proponga algún ejemplo de situaciones en las que se dé y sugiera posibles soluciones.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.3 Estrategias *mejor respuesta*

Ya hemos dado un primer paso hacia la caracterización del comportamiento racional en una situación de interdependencia estratégica: jugadores racionales no elegirán nunca estrategias dominadas. Pasamos ahora a considerar el proceso de selección por parte de un jugador entre sus estrategias no dominadas. Dado que los resultados asociados a la elección de una estrategia no dominada dependerán de lo que hagan los otros jugadores, la elección de un jugador dependerá de las expectativas que se forme sobre las estrategias que elegirán los otros jugadores.

Comenzamos esta pregunta proponiendo una forma de incorporar las expectativas en nuestros modelos. Veremos a continuación que, una vez incorporamos las expectativas, podemos ir un poco más allá de la eliminación de estrategias dominadas a la hora de caracterizar el comportamiento de jugadores racionales. En concreto, descartaremos que los jugadores elijan una determinada estrategia si ésta no es *mejor respuesta* bajo algún tipo de expectativas que se puedan formar. En otras palabras, descartaremos que jugadores racionales jueguen una determinada estrategia si disponen de otra que les da mejores resultados *crean lo que crean* acerca de las estrategias que elegirán el resto de jugadores. Aunque ciertamente una estrategia dominada no será nunca mejor respuesta, veremos que puede haber estrategias que, pese a no estar dominadas, no serían mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles.

2.3.1 Representación de las expectativas mediante distribuciones de probabilidad

Consideremos inicialmente el caso sencillo de un juego con dos jugadores como el que aparece recogido en la Figura 2.5. Dado que el jugador II sólo tiene dos estrategias, podemos recoger las expectativas del I sobre su comportamiento mediante un vector $(p, 1-p)$, donde convenimos que p es la probabilidad que asigna I a que II elija s_{II1} (por tanto, se cumplirá que $p \in [0,1]$). El caso en que I estuviese seguro de la elección del II se correspondería con una distribución de probabilidad degenerada, en la que toda la probabilidad se concentraría en la estrategia pura correspondiente. De manera similar podríamos recoger las expectativas del jugador II mediante un vector $(q, r, 1-q-r)$, cuyos componentes serán números reales no negativos con suma la unidad.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	10, 2	0, 4
s_{I2}	0, 1	10, 3
s_{I3}	4, 8	4, 0

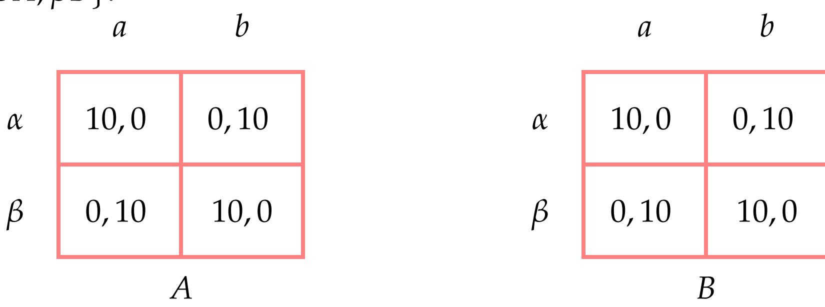
Figura 2.5. Mejor respuesta frente a dominancia estricta

Para un juego con dos únicos jugadores y espacios de estrategias finitos[4] utilizaremos la notación $\mu_i(s_j)$ para recoger unas determinadas expectativas de i respecto a la elección del j, siendo μ_i una función de la forma:

$$\begin{aligned} \mu_i : \quad & S_j \to [0,1] \\ & s_j \mapsto \mu_i(s_j). \end{aligned} \tag{2.2}$$

En tanto que distribución de probabilidad, dicha función deberá cumplir que $\Sigma_{s_j}\mu_i(s_j) = 1$.

En los juegos con más de dos jugadores, cada uno de ellos ha de formarse expectativas sobre la estrategia que elegirá cada uno de los otros. En este caso, sus expectativas serán sobre las combinaciones de estrategias del resto de jugadores. A modo de ejemplo, consideremos el juego representado en la Figura 2.6, en el cual aparecen en filas las estrategias del jugador I, en columnas las del jugador II, correspondiendo al jugador III la elección de entre la matriz A y la B. En dicho juego cada uno de los jugadores ha de formarse expectativas sobre las posibles combinaciones de estrategias de los otros dos. Por ejemplo, en el caso del jugador I sus expectativas vendrán dadas por una distribución de probabilidad sobre el conjunto $\mathbf{S}_{-I} = \{\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B\}$.



A	a	b
α	10, 0	0, 10
β	0, 10	10, 0

B	a	b
α	10, 0	0, 10
β	0, 10	10, 0

Figura 2.6. Un juego 3X2

[4]Aunque lo dejamos fuera de nuestro análisis por el momento, si el conjunto de estrategias del resto de jugadores fuese continuo podríamos considerarlo una variable aleatoria y recoger las expectativas del jugador i a través de una función de distribución.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Con carácter general, vamos a denotar por S_{-i} al conjunto de combinaciones posibles de estrategias de todos los jugadores menos el i y por $\mathbf{s}_{-i}$ a una cualquiera de esas combinaciones «reducidas» de estrategias. Las expectativas del jugador i vendrán dadas por una distribución de probabilidad sobre S_{-i}. Nos referiremos a una de esas distribuciones de probabilidad (a unas expectativas concretas) mediante la expresión $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ y al conjunto de distribuciones posibles mediante[5] $\Delta(S_{-i})$. Podemos interpretar $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ como una función que asigna una probabilidad a cada una de las combinaciones de estrategias reducidas de un jugador:

$$\begin{aligned} \mu_i : \quad & S_{-i} \to [0,1] \\ & \mathbf{s}_{-i} \mapsto \mu_i(\mathbf{s}_{-i}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por ser una distribución de probabilidad dicha función deberá cumplir que $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \geq 0 \, \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ y que $\Sigma_{\mathbf{s}_{-i}} \mu_i(\mathbf{s}_{-i}) = 1$.

Definición 2.3.1 (Expectativas de un jugador) *Las expectativas del jugador i sobre el comportamiento del resto de jugadores vienen dadas por una distribución de probabilidad que representamos mediante una función* $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \in \Delta(S_{-i})$ *que cumplirá* $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \geq 0 \, \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ *y que* $\Sigma_{\mathbf{s}_{-i}} \mu_i(\mathbf{s}_{-i}) = 1$.

▶ Ejercicio 2.3.1

Considere un juego con cuatro jugadores, cada uno de ellos con dos estrategias, y explique como sería la función $\mu_i(\mathbf{s}_{-\mathbf{i}})$ para cada uno de ellos.

2.3.2 Expectativas y elección racional

Consideremos un jugador i con unas expectativas dadas $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ sobre el comportamiento del resto de jugadores. Dejando para más adelante el análisis del proceso de formación de esas expectativas, nos centramos en cómo elegiría entre sus estrategias. Su incertidumbre sobre lo que harán los otros hace que cada una de sus estrategias no lleve asociado un único desarrollo del juego, sino distintos desarrollos posibles, cada uno de ellos con una probabilidad asociada (la que asigna en sus expectativas a las combinaciones de estrategias de los otros que llevan, dada la suya, a ese desarrollo del juego). La elección entre sus estrategias la hemos de plantear, por tanto, como una elección entre *loterías*, entiendo por tal un conjunto de pagos o ganancias posibles, cada una de ellos con una determinada probabilidad asociada. A modo de ejemplo, en el juego de la Figura 2.2, bajo unas determinadas expectativas para el jugador I dadas por el vector $(p, 1-p)$, su elección entre las estrategias M y B la

[5] Dado un conjunto finito cualquiera A, en matemáticas es habitual recoger por $\Delta(A)$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre dicho conjunto.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

hemos de plantear como una elección entre las siguientes loterías:

$$l_M = (8, 5; p, 1-p);$$
$$l_B = (9, 4; p, 1-p).$$

Como ya explicamos anteriormente, en estos casos supondremos que el jugador elige aquella estrategia que la da una mayor ganancia esperada[6]. A modo de ejemplo, si el jugador I tiene unas expectativas dadas por $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, elegirá su estrategia M ya que $V(l_M) = \frac{23}{4} > \frac{21}{4} = V(l_B)$.

▶ Ejercicio 2.3.2

Determine el conjunto de expectativas bajo las cuales el jugador I elegiría su estrategia B.

A partir de ahora asociaremos, por tanto, el comportamiento racional de los jugadores con la elección de estrategias que sean *mejor respuesta* a sus expectativas, en el sentido de que no exista ninguna otra estrategia a su alcance que tenga un mayor pago esperado (si puede haber otras que tengan el mismo pago esperado, esto es, la mejor respuesta a unas expectativas dadas no tiene porque ser única).

Definición 2.3.2 (Estrategia mejor respuesta) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$ y dadas unas expectativas del jugador i, $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$, la estrategia $\dot{s}_i$ es mejor respuesta a dichas expectativas sí y solo sí $V_i(\dot{s}_i; \mu_i(\mathbf{s}_{-i})) \geq V_i(s_i; \mu_i(\mathbf{s}_{-i}))\ \forall s_i \in S_i$.*

Si alguna de las estrategias de S_i no constituye mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles, podemos descartar que sea elegida por un jugador racional (por definición tiene otra que le da un mayor pago esperado). En otras palabras, jugadores racionales no elegirán nunca aquellas estrategias para las que existe una estrategia mejor sean cuales sean sus expectativas sobre el comportamiento del resto. Es muy importante tener en cuenta que con este criterio de selección no estamos limitando en modo alguno el tipo de expectativas que se puede formar un jugador racional (salvo por el hecho de que deben ser tales que se pueden recoger a través de una distribución de probabilidad).

Una estrategia dominada no puede ser, por su propia definición, mejor respuesta sean cuales sean las expectativas del jugador. La pregunta importante, sin embargo, es si pueden existir

[6] Recordemos que si los pagos vienen dados en unidades monetarias estaríamos asumiendo agentes neutrales al riesgo. Un planteamiento más general, que incorporase el análisis del efecto del riesgo sobre el comportamiento de los agentes, requeriría que los pagos viniesen dados de tal forma que ya recogiesen las preferencias de los individuos en relación a las loterías. En este segundo caso, estaríamos suponiendo que los pagos vienen dados en valores de función de utilidad cardinal y que los jugadores eligen buscando maximizar su utilidad esperada.

estrategias que, sin estar dominadas, no constituyan mejor respuesta bajo ninguna de las posibles expectativas del jugador. Sólo en este caso estaríamos avanzando en la caracterización del comportamiento racional. Para tratar de responder a la misma, consideremos el juego de la Figura 2.5. Si nos ponemos en lugar del jugador I vemos que ninguna de sus tres estrategias esta dominada. Queremos determinar ahora si existen expectativas (distribuciones de probabilidad de la forma $(p, 1-p)$ sobre S_{II}) que sostengan a cada una de ellas como mejor respuesta. A primera vista apreciamos que s_{I1} sería la mejor respuesta cuando el jugador I estuviese seguro de que el II va a jugar s_{II1} ($p = 1$) y, de la misma manera, s_{I2} sería la mejor respuesta cuando estuviese seguro de que el II va a jugar s_{II2} ($p = 0$). Por tanto, la duda que nos queda es si existirá algún valor de p que haga que sea s_{I3} la estrategia con una mayor pago esperado, esto es, que sea mejor respuesta para I. Para un valor cualquiera de p, el pago esperado del jugador I asociada a cada una de sus estrategias sería:

$$V_I(s_{I1}; p) = 10p$$
$$V_I(s_{I2}; p) = 10(1-p)$$
$$V_I(s_{I3}; p) = 4.$$

En la Figura 2.7 aparecen recogidos los valores que toman estas tres funciones para todos los posibles valores de p. Como puede apreciarse en la misma, no existe ningún valor de p que haga que s_{I3} sea una mejor respuesta para el jugador I. Si cree más probable s_{II1} ($p > .5$), su mejor respuesta es s_{I1}; si cree más probable s_{II2} ($p < .5$), su mejor respuesta es s_{I2}; y si asigna la misma probabilidad a ambas ($p = .5$), son mejores respuestas tanto s_{I1} como s_{I2}.

▶ Ejercicio 2.3.3

Determine el conjunto de estrategias que pueden ser mejores respuestas bajo algunas de las expectativas posibles para cada uno de los jugadores en el siguiente juego:



	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	10, 2	0, 4
s_{I2}	0, 1	10, 3
s_{I3}	6, 8	6, 0

Figura 2.8

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

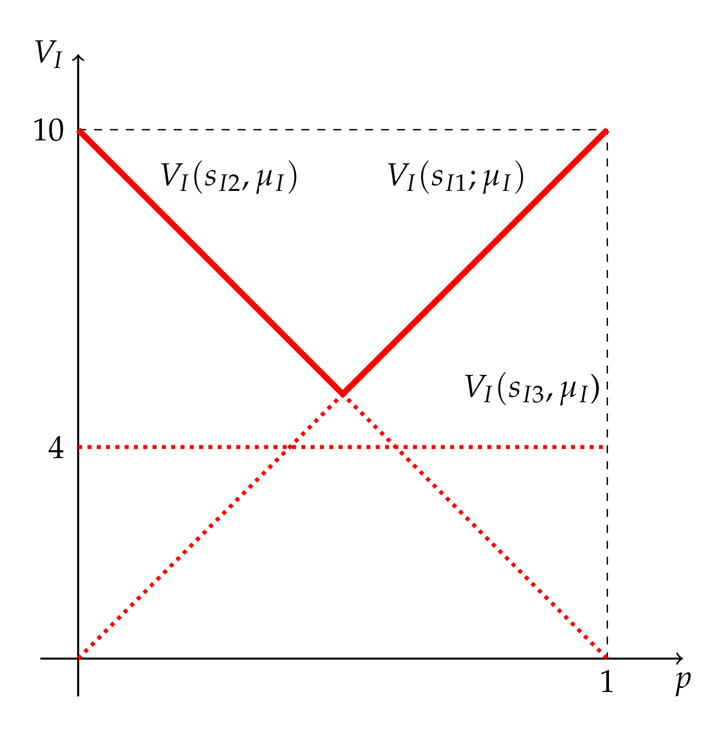


Figura 2.7. ***Pago esperado de las estrategias puras del jugador I en función de sus expectativas sobre el comportamiento del II.***

El ejemplo anterior pone de manifiesto que caracterizar el comportamiento racional en términos de la no elección de estrategias que no sean mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles, va más allá de hacerlo en términos de la no elección de estrategias estrictamente dominadas. En la práctica lo habitual será comenzar eliminando primero las estrategias de un jugador que estén estrictamente dominadas, pasando luego a considerar si existe alguna otra estrategia que no sea mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles[7].

A modo de resumen, los resultados alcanzados hasta el momento en relación con el comportamiento de jugadores racionales en situaciones de interdependencia estratégica pueden resumirse en las siguientes dos proposiciones:

1. no elegirán nunca estrategias que no sean *mejor respuesta* bajo algunas de sus expectativas posibles;

2. una estrategia estrictamente dominada nunca será mejor respuesta, pero la afirmación contraria no es cierta.

[7]Plantearemos en términos más generales la relación entre dominancia y mejor respuesta en el Tema 4, una vez que hayamos ampliado el concepto de estrategia para incluir las denominadas *estrategias mixtas*.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.4 Dominancia iterada y estrategias racionalizables

2.4.1 Introducción

Hasta el momento nuestra caracterización del comportamiento de jugadores racionales se reduce a la afirmación de que nunca jugarán estrategias que no sean mejores respuestas bajo alguna de las expectativas posibles. Sin embargo, la esencia del comportamiento estratégico se encuentra precisamente en el proceso de formación de expectativas. En última instancia, un buen estratega lo será por su capacidad para anticipar el comportamiento de los demás. A la hora de abordar en nuestros modelos el problema de qué tipo de expectativas cabe esperar que tenga un jugador y cuales no, es útil distinguir entre dos posibles enfoques:

1. un enfoque *ex-ante* basado en la *introspección*: los jugadores utilizan la información de que disponen para «ponerse en los pies del otro» y tratar de anticipar que harán o que no harán los otros jugadores.

2. un enfoque *ex-post* basado en el *aprendizaje* o en la *evolución*: aunque en principio los jugadores pueden tener cualquier tipo de expectativas, estas irán cambiando y adaptándose a la información que reciban los jugadores procedente de su participación de manera repetida en situaciones similares, de la observación de los resultados que obtienen otros jugadores en función de las estrategias que eligen,. . . . Lo importante en este caso es el tipo de expectativas que se sostienen después de ese proceso.

En esta apartado vamos a utilizar el primero de los enfoques para tratar de avanzar en la caracterización del comportamiento de los jugadores en el marco de los juegos simultáneos con información completa. La primera pregunta que debemos hacernos es, por tanto, de qué información disponen los jugadores en este tipo de juegos y, a partir de la respuesta a la misma, en que medida es posible acotar el tipo de expectativas que se pueden formar. Evidentemente, el resultado final del proceso será que si conseguimos acotar las expectativas que cabe esperar que se formen los jugadores también podremos acotar el conjunto de estrategias entre las que elegirán.

Toda la información de la que dispone un jugador en el tipo de juegos que estamos estudiando se deriva del hecho de que **tanto la estructura del juego como la racionalidad de todos los jugadores son conocimiento común**. El conocimiento común de la estructura del juego supone que cada jugador conoce de manera perfecta las alternativas y las preferencias de cada uno de los otros, pudiendo ponerse en su lugar y considerar su problema de elección en las mismas condiciones que lo hace el jugador al que le corresponde decidir. Supone, también, que cada jugador sabe que cada uno de los otros dispone de información para plantearse igual que él mismo el problema de decisión al que se enfrenta, que cada jugador sabe que todos saben que cada uno de ellos puede ponerse en lugar de cada uno de los otros, . . . y

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

así *ad infinitum*. Por su parte, el conocimiento común de la racionalidad supone que cada jugador anticipa que cada uno de los otros sólo elegirá estrategias que sean mejor respuesta a sus expectativas, pero también que cada jugador sabrá que los otros anticipan que sólo jugará estrategias que sean mejor respuesta, . . . y así indefinidamente.

El objetivo es determinar las expectativas que son consistentes con ese supuesto de que la racionalidad y la estructura del juego son conocimiento común y, partiendo de ahí, el conjunto de estrategias que son mejor respuesta a ese subconjunto de expectativas (que son *racionalizables*). Comenzaremos considerando situaciones en las que la racionalidad de los jugadores se manifiesta únicamente en términos de la no elección de estrategias que estén estrictamente dominadas por otras, dejando para el final el caso general en que la racionalidad se manifiesta en la no elección de estrategias que no sean mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles.

2.4.2 Dominancia iterada

Consideremos, a modo de ejemplo, el juego de la Figura 2.9. El jugador I no tiene ninguna estrategia dominante, esto es, su mejor estrategia depende de que lo que haga el II. En consecuencia, antes de elegir tratará de adivinar que estrategia elegirá el otro jugador. Dado que es un juego de información completa, I conoce la función de ganancias del jugador II y anticipa que elegirá su estrategia dominante s_{II1}. En otras palabras, las únicas expectativas consistentes con la información de que dispone el jugador I son por tanto aquellas que asigna probabilidad 1 a que II elija s_{II1}. Dadas esas expectativas, la elección racional del I es s_{I1}. Dado que la elección del II no depende en este caso de las expectativas que se forme, tenemos ya una propuesta concreta sobre la forma en que se desarrollará el juego: la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}).

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$4,4$	$2,3$
$\mathbf{s_{I2}}$	$2,2$	$5,1$

Figura 2.9. Un juego con solución por dominancia iterada

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

En la Figura 2.10 aparece un juego en forma normal que también tiene solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas, pero en este caso el número de iteraciones es mayor.

	L	**C**	**D**
A	$4,3$	$5,1$	$6,2$
M	$2,1$	$8,4$	$3,6$
C	$3,0$	$9,6$	$2,8$

Figura 2.10. Un juego con solución por dominancia iterada

Únicamente existe una estrategia dominada, la C para el jugador II. A la hora de elegir entre las estrategias restantes, cada jugador necesariamente ha de formarse unas expectativas sobre lo que hará el otro. Vamos a ponernos en lugar de cada uno de ellos, tratando de analizar su elección:

- Jugador I

  1. La mejor alternativa para mí depende de lo que haga II. Dado que conozco sus ganancias (es un juego de información completa), sé que el conoce las mías, sé que el sabe que yo conozco las suyas, ... voy a intentar tratar de anticipar cual puede ser su decisión.

  2. II no jugará C, ya que, cualesquiera que sean sus expectativas sobre lo que yo voy a hacer, le da una mayor ganancia D que C. Para elegir entre L y D, tratará de anticipar que estrategia elegiré yo. Como conoce mis ganancias, verá que mi elección dependerá de las expectativas que me forme sobre como elegirá él. Anticipará que yo creo que no va a jugar nunca C y, en consecuencia, que voy a elegir A, por lo que a él le interesa L.

- Jugador II

  1. No me interesa jugar C, ya que decida lo que decida I, es mejor para mí D.

  2. Para decidirme entre L y D, necesito conocer cual será la decisión de I. Dado que conozco sus ganancias, sé que el conoce las mías, sé que el sabe que yo conozco las suyas, ... voy a intentar tratar de anticipar cual puede ser su decisión.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3. I anticipará que yo no voy a elegir nunca C, por lo que elegirá A. Por tanto, me interesa elegir L.

La combinación de estrategias (A, L) constituye, por tanto, la solución por dominancia iterada de este juego.

En general, el procedimiento a seguir para buscar la solución consiste en identificar primero las estrategias dominadas de alguno de los jugadores y eliminarlas. Dado que se trata de juegos de información completa, todos los jugadores conocen las estrategias dominadas de los otros y anticipan que no las elegirán. Una vez que los jugadores asignan probabilidad cero a la elección de determinadas estrategias por parte de otros jugadores, pueden aparecer nuevas estrategias dominadas, procediendo a una segunda ronda de eliminación. Si este proceso nos deja con una única estrategia para cada jugador, dicha combinación de estrategias será la solución del juego por eliminación iterativa de estrategias dominadas.

Definición 2.4.1 (Solución por dominancia iterada) *Dado un juego estático en forma normal G, si la eliminación iterativa de estrategias dominadas nos conduce a una única estrategia para cada jugador, dicha combinación de estrategias constituye la solución por dominancia iterada del juego.*

▶ Ejercicio 2.4.1

Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas del siguiente juego:

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$	$\mathbf{s_{II3}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$8, 3$	$0, 4$	$4, 4$
$\mathbf{s_{I2}}$	$4, 2$	$1, 5$	$5, 3$
$\mathbf{s_{I3}}$	$3, 7$	$0, 1$	$2, 0$

Figura 2.11. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.4.1

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.4.3 Racionalizabilidad

En el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, la racionalidad de los jugadores se asocia a la no elección de estrategias que estén estrictamente dominadas. Sin embargo, hemos visto anteriormente que la racionalidad de los jugadores la hemos de interpretar en el sentido más general de que no elegirán nunca estrategias que no sean mejor respuesta bajo alguna de las expectativas posibles sobre el comportamiento del resto. Si partimos de que lo que es conocimiento común es precisamente que los jugadores no elegirán estrategias que no sean mejores respuesta a alguna de las expectativas posibles (en lugar de que no jugarán estrategias dominadas) estaremos aplicando también un criterio de selección de estrategias más general que el de la dominancia iterada y que se conoce como *racionalizabilidad*. A modo de ejemplo, el juego de la Figura 2.5 no tiene solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas, pero solamente es racionalizable la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}). En cualquier caso, el análisis detallado de la relación entre dominancia iterada y racionalizabilidad lo aplazamos hasta que se introduzca el concepto de estrategias mixtas en los próximos temas.

2.5 Dominancia débil

Hasta el momento hemos venido utilizando el concepto de dominancia estricta, esto es, hemos considerado situaciones en las que unas determinadas estrategias son peores que otras hagan lo que hagan los otros jugadores. Sin embargo, en algunos casos puede ocurrir que una determinada estrategia lleve asociados resultados que nunca serán peores que los de otra, pero para determinadas casos serán iguales. Las definiciones que hemos dado anteriormente de estrategia (estrictamente) dominada y estrategia (estrictamente) dominante se extienden de manera automática a su versión *débil*:

Definición 2.5.1 (Estrategia débilmente dominante) *Dado* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$*, la estrategia* $\tilde{s}_i$ *es una estrategia (débilmente) dominante para el jugador i si y sólo si:* $U_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_i$ *y existe al menos una combinación de estrategias del resto de jugadores* $\check{\mathbf{s}}_{-i}$ *tal que* $U_i(\tilde{s}_i, \check{\mathbf{s}}_{-i}) > U_i(s_i, \check{\mathbf{s}}_{-i}) \forall s_i \in S_i$.

▶ Ejercicio 2.5.1

Defina **estrategia débilmente dominada**.

La pregunta que debemos hacernos ahora es si la busqueda de soluciones aplicando el criterio de dominancia estricta puede extenderse al de dominancia débil. Consideremos, a modo de ejemplo, que el modelo de la recolección de setas los pagos de los jugadores fuesen los que se recogen en la Figura 2.12.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	H	**M**
H	$10, 10$	$20, 0$
M	$0, 20$	$20, 20$

Figura 2.12. A setas, ¿hoy o mañana?(b)

Con los nuevos pagos la estrategia H sigue dominando a la M para ambos jugadores, pero ahora lo hace débilmente (conduce a un mayor pago si el otro coge H pero daría el mismo pago si el otro coge M). ¿Existen las mismas razones para proponer (H, H) como solución que si la dominancia es estricta? La elección de una estrategia débilmente dominada puede conducir al mismo resultado que la estrategia que la domina, algo que no ocurre si lo que elige el jugador es una estrategia estrictamente dominada. En la medida que para unas determinadas circunstancias es uno de los mejores cursos de acción posibles, no podemos tildar dicha elección de irracional, en especial en marcos en los que existan razones para que los jugadores crean muy probable que se van a dar esas circunstancias (que los otros jugadores van a elegir la combinación de estrategias para los que la estrategia débilmente dominada es una de las mejores respuestas). En el caso de nuestro ejemplo, podrían existir características de la situación de interdependencia estratégica que no hemos incorporado a nuestro modelo que hiciesen que cada jugador confiase en que el otro esperará a mañana. En ese caso (M, M) no sería descartable como solución del juego; aún más se trata de una solución estable en un sentido que analizaremos en el próximo tema.

De la misma manera, podríamos recurrir a la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas como criterio de selección. Dicho criterio descansaría en el supuesto de que es conocimiento común que los jugadores no eligen estrategias débilmente dominadas, por lo que presentaría el mismo inconveniente que acabamos de señalar. Dado que una estrategia débilmente dominada si es mejor respuesta (aunque haya otras que también lo son) para unas determinadas expectativas, puede ser racionalizable.

En definitiva, cuando recurramos a la eliminación de estrategias débilmente dominadas debemos ser especialmente cuidadosos, ya que su aplicación no tiene una base sólida en la racionalidad (y el hecho de que la misma sea conocimiento común), algo que si ocurría en el caso de la dominancia estricta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.6 Ejercicios

▶ Ejercicio 2.6.1

Ponga algún ejemplo de situaciones tipo *dilema del prisionero*.

▶ Ejercicio 2.6.2 *Amigo o enemigo*

En un concurso de televisión dos participantes elegidos al azar trabajan en equipo para conseguir la mayor cantidad de dinero posible[a]. A continuación han de decidir de manera simultánea entre dos opciones, *amigo* o *enemigo*, determinándose el premio de cada uno de ellos de la siguiente manera:

- si los dos eligen *amigo*, se reparten la cantidad acumulada x a partes iguales;
- si uno elige *amigo* y el otro *enemigo*, éste último se lleva todo;
- si ambos eligen *enemigo*, ninguno de los dos se lleva nada.

Se pide:

1. Haga la representación en forma normal de esta situación de interdependencia estratégica.
2. ¿Se corresponde con una situación tipo Dilema del Prisionero? Explique su respuesta.
3. Comente los factores que considere que pueden influir en la decisión de los concursantes.

[a] La situación de interdependencia estratégica que se recoge en este ejercicio se corresponde con la planteada en el concurso *Friend or Foe* emitido por el canal americano Game Show Channel por primera vez en el año 2002. En You Tube pueden encontrarse muchos videos con programas grabados. Otro video interesante relacionado con un concurso similar puede verse aquí.

▶ Ejercicio 2.6.3

Para el juego de la figura adjunta:

1. Exprese mediante un vector el conjunto de posibles expectativas de cada uno de los jugadores.
2. A partir de dichos vectores, exprese las loterías asociadas a cada estrategia del jugador II.
3. Determine la estrategia óptima del jugador II bajo el supuesto de que asigna la misma probabilidad a cada una de las estrategias del jugador I.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

4. Ponga algún ejemplo de expectativas que llevaría al jugador I a elegir su estrategia s_{I1}.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$2,2$	$4,2$	$3,4$
s_{I2}	$4,-2$	$1,3$	$2,1$
s_{I3}	$3,3$	$1,1$	$5,-1$

Figura 2.13. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.3

▶ Ejercicio 2.6.4

Dado el juego de la figura adjunta, determine para cada jugador el conjunto de estrategias que serían mejor respuesta bajo alguna de las expectativas posibles.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$0,3$	$6,4$	$3,1$
s_{I2}	$5,1$	$2,2$	$2,0$
s_{I3}	$2,2$	$3,0$	$0,1$

Figura 2.14. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.4

▶ Ejercicio 2.6.5

Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas del juego cuya matriz de pagos aparece en la Figura 2.16.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$8, 5$	$14, 9$	$1, 12$
s_{I2}	$6, 1$	$24, 3$	$3, 0$
s_{I3}	$5, 7$	$16, 1$	$2, 9$

Figura 2.15. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.5

▶ Ejercicio 2.6.6

Determine las combinaciones de estrategias racionalizables para el siguiente juego:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$2, 4$	$12, 0$	$-4, -4$
s_{I3}	$3, -4$	$2, 0$	$2, 8$

Figura 2.16. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.6

▶ Ejercicio 2.6.7

Adivinando la media. Cada uno de los individuos de un grupo ha de elegir de forma simultánea un número entre el 1 y el 100, ambos inclusive. A partir de todos los números elegidos se calcula la media y el individuo cuyo número esté más próximo a las $\frac{2}{3}$ partes de la misma se le ofrece un determinado premio. Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas de este juego.

▶ Ejercicio 2.6.8

Considere una situación conocida como **la paradoja del presidente**. Tres individuos,I, II, y III tienen que elegir por votación entre tres alternativas A,B y C. Las reglas de la votación establecen que se llevará a cabo aquella alternativa que obtenga más votos, y que

en caso de empate decidirá el voto del presidente. Las preferencias de cada individuo vienen dadas por:

$$A \succ_I B \succ_I C; \quad B \succ_{II} C \succ_{II} A; \quad C \succ_{II} A \succ_{III} B$$

Busque la solución por eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas y explique a continuación porque se habla de paradoja.

▶ Ejercicio 2.6.9

Una subasta de segundo precio es aquella cuyas reglas establecen que el mejor postor se adjudicará el objeto de la subasta pero pagando únicamente el importe de la segunda mejor puja (está implícito por ejemplo en las subastas de Ebay). Discuta de manera informal la influencia sobre el comportamiento de los participantes en una subasta de este tipo de regla en relación con la alternativa de que el ganador tenga que pagar el importe de su puja (subasta de primer precio).

Represente esta situación como un juego en forma estratégica y demuestre que en la subasta de segundo precio existe una solución por dominancia débil consistente en que cada jugador hace una puja igual a su precio de reserva .

▶ Ejercicio 2.6.10

Considere la situación de interdependencia estratégica asociada a la elección por los alumnos de una determinada clase de un delegado mediante votaciones a sobre cerrado.

1. Considere inicialmente que se presentan dos candidatos A y B y responda a las siguientes cuestiones.

   a) Represente esta situación como un juego en forma normal.

   b) Considere un estudiante que prefiere como delegado al candidato A y demuestre que la estrategia votar A es para él una estrategia débilmente dominante.

2. Considere ahora que se presentan tres candidatos, A, B y C.

   a) Represente al situación como un juego en forma normal.

   b) Considere un estudiante que prefiere como delegado al candidato A y determine si tiene alguna estrategia débilmente dominante. Compruebe a continuación si alguna de las estrategias está débilmente dominada.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria





Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 3

Juegos estáticos (II)

Equilibrio de Nash. Estrategias mixtas.

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.1 Introducción

En el tema anterior hemos abordado el proceso de formación de expectativas a partir del supuesto de que tanto la estructura del juego, como la racionalidad, eran conocimiento común. A partir de ese supuesto, descartábamos determinados tipos de expectativas y, como consecuencia, la elección de determinadas estrategias. El resultado era la selección de un conjunto más reducido de combinaciones posibles de estrategias que cumplían la propiedad de ser racionalizables.

Frente a este enfoque *ex-ante*, en el que los jugadores *se ponen en los pies de los otros* para intentar anticipar su comportamiento, cabe adoptar un enfoque *ex-post*, en el que los jugadores se forman sus expectativas a partir de la experiencia derivada de la participación de manera repetida en el mismo tipo situaciones de interdependencia estratégica. Desde este punto de vista, la idea de equilibrio conduce de manera natural a proponer como condición que debe cumplir una combinación de estrategias para ser solución de un juego que en la misma cada jugador este adoptando una estrategia que sea la mejor respuesta a las estrategias del resto de jugadores. Si esto se cumple, estaríamos ante un estado estacionario en el que los jugadores verían *ex-post* que la estrategia elegida les ha llevado a los mejores resultados posibles. Esa propiedad de que una combinación de estrategias de ser simultáneamente mejor respuesta para todos los jugadores, es precisamente la característica del concepto de solución más conocido en la teoría de juegos, el de equilibrio de Nash. En la primera parte del tema se define este concepto y se explica la forma habitual de determinar las combinaciones de estrategias que son equilibrio de Nash a partir de las *funciones de mejor repuesta*.

En la segunda parte del tema se aborda la ampliación del espacio de elección de los jugadores, permitiendo ahora que puedan elegir *estrategias mixtas*. Cada jugador en lugar de poder elegir únicamente entre sus *estrategias puras*, podrá ahora escoger una *regla* para seleccionar de manera aleatoria entre ellas. Una vez definidas las estrategias mixtas, abordaremos de nuevo la caracterización del comportamiento de los jugadores en este marco ampliado. Extenderemos el concepto de equilibrio de Nash al caso de estrategias mixtas y veremos como afecta al análisis en términos de dominancia y racionalizabilidad que hemos realizado en el Tema 2. Para concluir el tema, se presenta una discusión muy general sobre el concepto de equilibrio de Nash, a la vez que se aborda el problema de la existencia, la unicidad y, en su caso, la selección de uno de los equilibrios de un juego como solución del mismo.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.2 Equilibrio de Nash

3.2.1 Concepto

Consideremos el juego de la Figura 3.4 y supongamos que existe una población de individuos que se enfrentan de forma repetida, pero anónima[1], a este tipo de situación de interdependencia estratégica. Cada jugador se enfrenta, por tanto, muchas veces a ese tipo de situación, pero cada una de ellas con *rivales* distintos. Bajo esta perspectiva, resulta lógico preguntarnos si cabe esperar que surja una manera *estable* de desarrollarse el juego, esto es, que siempre que los jugadores se enfrenten a una situación de este tipo *jueguen* de la misma manera. Si así fuese, la combinación de estrategias propuesta como forma estable de desarrollarse el juego debería servir de base para la formación de expectativas de los jugadores y, además, debería ser *racional*, en el sentido de que cada jugador esté eligiendo una estrategia óptima dadas esas expectativas. En otras palabras, si un juego tiene una forma estable de jugarse, entonces:

- las expectativas de cada jugador cada vez que se enfrente a una situación de ese tipo deberían ser que el otro se comportará *como lo hacen siempre jugadores de ese tipo en estas situaciones*;
- cada jugador debería estar adoptando una estrategia que fuese la mejor respuesta a esas expectativas.

Consideremos la combinación de estrategias (s_{I2}, s_{II3}) y veamos si cumple estas condiciones. Si el jugador I creyese, en base a su experiencia previa, que los de tipo II siempre eligen la estrategia s_{II3} ciertamente su elección sería s_{I2}. Sin embargo, si el jugador II creyese que los jugadores de tipo I siempre eligen s_{I2}, su mejor respuesta no sería s_{II3}, sino s_{II2}. En definitiva, los jugadores de tipo II jugarían de otra manera, las expectativas de los de tipo I también serían otras, lo que les llevaría a su vez a jugar de otra manera,. . . .

Si analizásemos, una por una, todas las combinaciones de estrategias del juego, veríamos que sólo en una de ellas, la (s_{I1}, s_{II1}), se dan esas condiciones de consistencia para proponerla como forma de jugar estable. En efecto, si cada jugador se comportase de acuerdo con ella siempre que se enfrentase a una situación de este tipo, vería a posteriori que su elección ha sido la mejor posible dado lo que ha hecho el otro. Cada vez que se enfrentase a una situación como ésta no tendría razones para cambiar sus expectativas y, por tanto, tampoco su comportamiento. Lo que distingue en última instancia a la combinación (s_{I1}, s_{II1}) del resto es que ambas estrategias son simultáneamente mejor respuesta la una a la otra. Un **equi-**

[1]En el caso de que los jugadores asignasen una probabilidad positiva a volver a enfrentarse con el otro deberíamos modelizarlo como un juego dinámico, ya que en este caso a la hora de tomar una decisión tendría en cuenta las consecuencias futuras de la misma (como influirá en el comportamiento del otro en el futuro).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

librio de Nash es precisamente una combinación de estrategias que cumple esa condición: que **cada jugador esta eligiendo la mejor estrategia posible dadas las estrategias elegidas por los otros**.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	2, 4	5, 0	0, 2
s_{I2}	0, 0	1, 8	4, 6

Figura 3.1. Un juego con un equilibrio de Nash

Definición 3.2.1 (Equilibrio de Nash) *Dado un juego en forma normal, $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{U_i\}_{i=1}^{n} \rangle$, una determinada combinación de estrategias $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ constituye un **equilibrio de Nash** del mismo sí y sólo sí: $U_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i}) \geq U_i(s_i, \hat{s}_{-i}), \forall s_i \in S_i, \quad \forall i$.*

Alternativamente:

Definición 3.2.2 *Dado un juego en forma normal, $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{U_i\}_{i=1}^{n} \rangle$, una determinada combinación de estrategias $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ constituye un **equilibrio de Nash** del mismo sí y sólo sí: $\hat{s}_i \in \arg\max_{s_i} U_i(s_i, \hat{s}_{-i}), \quad i = 1, \ldots, n$.*

A diferencia del tema anterior, el criterio para caracterizar la elección de estrategias por parte de los jugadores ya no es la racionalización *ex-ante* su decisión individual, sino la consistencia *ex-post* de las expectativas y las decisiones de todos ellos. Podemos interpretar el equilibrio de Nash como un estado estacionario, en el sentido de que si los jugadores observan que cada vez que se enfrentan a esa situación se desarrolla conforme a $\hat{\mathbf{s}}$ ningún jugador tiene razones para cambiar de estrategia. No las tiene porque esta eligiendo la mejor respuesta dadas unas expectativas, y porque dichas expectativas se ven confirmadas cada vez que *juega*.

Por el momento vamos a centrarnos en el procedimiento a seguir para determinar los equilibrios de Nash de un juego, pero volveremos más adelante sobre la interpretación y justificación del equilibrio de Nash como concepto de solución.

3.2.2 Funciones de mejor respuesta y determinación del equilibrio de Nash

El procedimiento habitual a la hora de determinar los equilibrios de Nash de un juego consta de dos pasos:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1. Búsqueda, para cada jugador, de las estrategias que constituyen mejores repuestas a cada posible combinación de estrategias del resto de jugadores :

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{s}_{-i}): \quad & S_{-i} \longrightarrow S_i \\ & \mathbf{s}_{-i} \longmapsto \{s_i^* : u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i\}. \end{aligned}$$

   Dado que para determinadas $\mathbf{s}_{-i}$ el jugador i puede tener más de una estrategia que sea mejor respuesta, $B_i(s_{-i})$ es en general una *correspondencia*; solamente en el caso en que a cada $\mathbf{s}_{-i}$ le corresponda una única estrategia óptima estaremos ante una función propiamente dicha.

2. Determinación de todas las combinaciones de estrategias que son simultáneamente mejores respuestas para todos los jugadores:

$$(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_n) \quad EN \Leftrightarrow \hat{s}_i \in B_i(\hat{\mathbf{s}}_{-i}) \quad \forall i.$$

Ejemplo 3.2.1

En el juego representado en la Figura 3.17 las mejores respuestas de un jugador a cada posible estrategia del otro se señalan subrayando el pago correspondiente. El hecho de que solo la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}) presente los dos pagos subrayados, nos indica que constituye el único equilibrio de Nash del juego.

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$\underline{16}, \underline{7}$	$3, 5$
$\mathbf{s_{I2}}$	$4, \underline{8}$	$\underline{22}, 6$
$\mathbf{s_{I3}}$	$7, 5$	$19, \underline{9}$

Figura 3.2. Mejores respuesta y equilibrio de Nash

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 3.2.1

Determine todos los equilibrios de Nash del juego que aparece en la figura adjunta.

s_{III1}:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	1, 4, 3	4, 6, 0	1, 2, 2
s_{I2}	2, 8, 2	3, 4, −1	1, 6, −1
s_{I3}	2, 2, 1	5, 8, 2	2, 4, 0

s_{III2}:

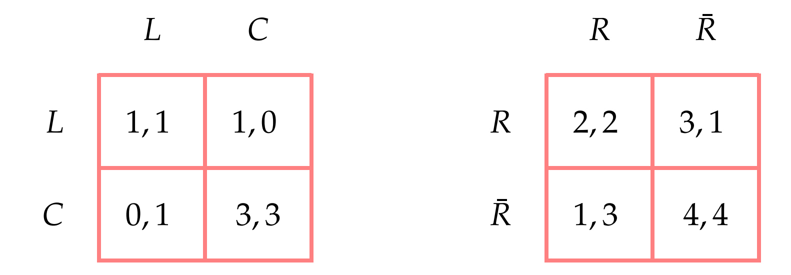
	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	1, 4, 2	3, 6, 1	1, 2, 1
s_{I2}	2, 2, 1	2, 0, 1	1, 0, 2
s_{I3}	3, 2, −1	2, 4, 2	2, 6, −1

Figura 3.3. Un juego en forma estratégica con tres jugadores, en el cual el jugador III elige s_{III1} ó s_{III2}

▶ Ejercicio 3.2.2

La figura adjunta recoge dos versiones de un un juego conocido como *la caza del ciervo*[a]. La primera versión es la forma habitual de presentar la situación planteada originalmente por Rousseau; la segunda es una variante que ha sido utilizada —como alternativa al *dilema del prisionero*— para explicar el *dilema de la seguridad* en el marco de las relaciones internacionales.

Determine para todos los equilibrios de Nash del mismo. Compare a continuación esta situación con la recogida en el *dilema del prisionero*.



	L	C
L	1, 1	1, 0
C	0, 1	3, 3

	R	$\bar{R}$
R	2, 2	3, 1
$\bar{R}$	1, 3	4, 4

Figura 3.4

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

[a]Su nombre hace referencia a una situación planteada por Rousseau, en torno a las dificultades que supone para el logro de la cooperación entre un grupo de individuos la falta de confianza de unos en los otros. La caza de un ciervo requiere el esfuerzo colectivo de un grupo de individuos; sin embargo, durante la caza a cada cazador le puede surgir la oportunidad de coger una liebre. En caso de que un individuo decida tratar de coger la liebre, el grupo no cogerá al venado. La desconfianza de cada individuo, respecto al comportamiento de los otros en el caso de que les salga una liebre, puede llevarles a no participar en la caza en grupo o, si participa, a dedicarse a cazar liebres. Visto desde otro punto de vista: la caza en grupo de un venado requiere un marco institucional en el cuál los individuos confíen los unos en los otros.

3.2.3 Equilibrio de Nash y dominancia

► Ejercicio 3.2.3

Repase el Tema 2 y conteste a continuación a las siguientes cuestiones:

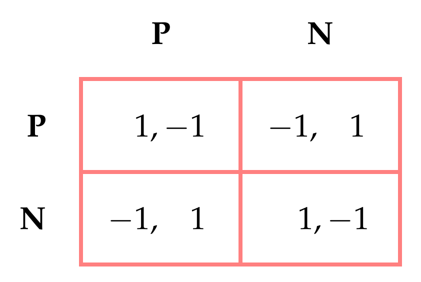
1. Una estrategia (estrictamente) dominada, ¿puede formar parte de un equilibrio de Nash? ¿ Y una estrategia débilmente dominada?
2. Si aplicamos el procedimiento de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas,¿podemos eliminar algún equilibrio de Nash? ¿Ocurre lo mismo si lo extendemos a las estrategias débilmente dominadas?
3. Una estrategia no racionalizable, ¿puede formar parte de un equilibrio de Nash?

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.3 Estrategias mixtas

3.3.1 Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: un ejemplo

Consideremos el juego representado en su forma estratégica en la Figura 3.11. Hemos denominado al mismo «pares o nones» porque la situación de interdependencia estratégica que representa se corresponde con la del juego popular que se conoce con ese nombre[2].



	P	**N**
P	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
N	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Figura 3.5. «Pares o nones»

Podemos comprobar que ninguna de las cuatro combinaciones de estrategias posibles constituye un equilibrio de Nash[3].

Sin entrar por el momento en la justificación, vamos a considerar ahora que los jugadores en lugar de elegir una única estrategia, lo que hacen es asignar una probabilidad a cada una de ellas. Resulta útil pensar que los jugadores lo que eligen es una *regla* para seleccionar de manera aleatoria entre sus estrategias originales. Denominaremos a cada una de esas posibles reglas **estrategia mixta** y a cada una de las estrategias *originales* **estrategia pura**. Una estrategia mixta es, por tanto, una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras $\{P, N\}$. Podemos considerar que una estrategia pura como una estrategia mixta *degenerada* que asigna toda la probabilidad a una de las alternativas. Vamos a representar de manera genérica una estrategia mixta cualquiera para el jugador I por $\sigma_I = (p, 1-p)$ y una para el jugador II por $\sigma_{II} = (q, 1-q)$.

Consideremos por separado el problema de decisión de cada uno de los jugadores. Si comenzamos poniéndonos en lugar del jugador I, su ganancia esperada si elige una estrategia mixta cualquiera $\sigma_I = (p, 1-p)$, cuando II elija a su vez una mixta cualquiera $\sigma_{II} = (q, 1-q)$

[2]Aunque en el juego popular cada jugador elige libremente el número de dedos que saca extendidos, es inmediato comprobar que lo único relevante de su decisión es si dicho número es par o es impar.

[3]Sea cual sea el desarrollo del juego, el jugador que pierde siempre tiene una estrategia que le hubiese dado una mayor ganancia dada la elección del otro.

vendrá dada por[4]:

$$\begin{aligned} V_I(\sigma_I, \sigma_{II}) &= pV_I(P, \sigma_{II}) + (1-p)V_I(N, \sigma_{II}) \\ &= p[qU_I(P,P) + (1-q)U_I(P,N)] + (1-p)[qU_I(N,P) + (1-q)U_I(N,N)] \\ &= pq(1) + +p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)](1) \\ &= 4pq - 2p - 2q + 10. \end{aligned} \tag{3.1}$$

La elección de una estrategia mixta por parte del jugador I queda totalmente determinada por el valor que asigne a p, por lo que podemos plantear su problema de elección en términos de dicho valor. Partiendo de la ecuación 3.3.1 y derivando parcialmente respecto a p podemos ver su influencia sobre la ganancia esperada del jugador I:

$$\frac{\partial V_I}{\partial p}(\cdot) = 4q - 2 \begin{cases} > 0, & \text{si } q > 0.5 \\ = 0, & \text{si } q = 0.5 \\ < 0, & \text{si } q < 0.5 \end{cases} \tag{3.2}$$

Estamos ya en condiciones de determinar la mejor respuesta del jugador I (en términos de que estrategia mixta elegir) para cada posible estrategia mixta del jugador II. Aunque seguiremos utilizando la notación habitual y denominaremos $B_I(\sigma_{II})$ a la correspondencia[5] de mejor respuesta del jugador I, recurriremos a veces a la expresión $p^*(q)$ por resultar más ilustrativa en algunos casos. Dicha correspondencia adopta la forma:

$$B_I(\sigma_{II)} \equiv p^*(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q > 0.5 \\ \text{cualquier } p \in [0,1], & \text{si } q = 0.5 \\ 0, & \text{si } q < 0.5 \end{cases} \tag{3.3}$$

Podemos representar gráficamente dicha correspondencia:

[4] En lenguaje matemático, esta ganancia esperada es una **combinación convexa** de las ganancias asociadas a cada uno de los posibles desarrollos del juego, en la cual los pesos de cada ganancia posible vienen dados por la probabilidad de que los jugadores elijan la combinación de estrategias puras que lleva a esa ganancia.

[5] En la medida que a algún valor de q le va a corresponder más de un valor de p que constituiría una mejor respuesta estamos ante a una correspondencia y no ante una función.

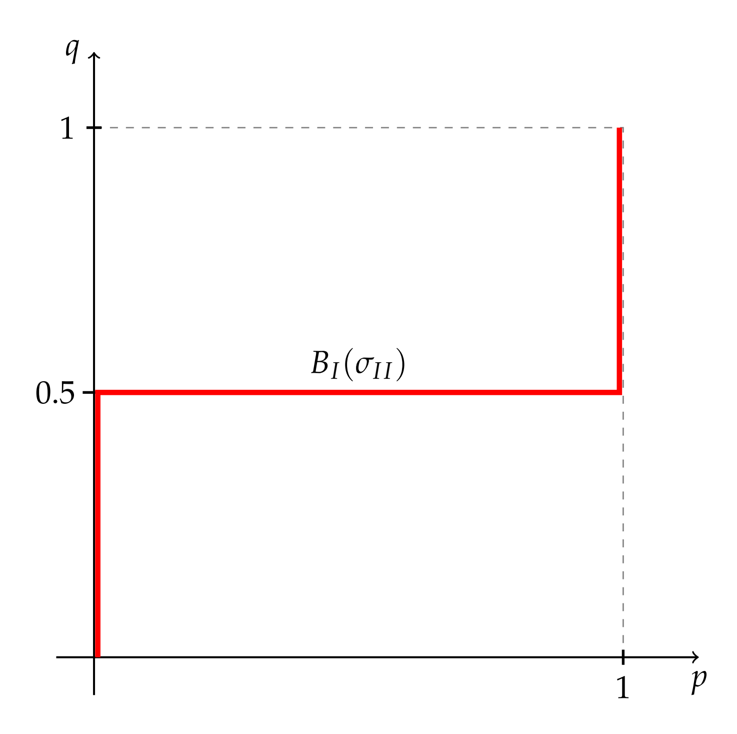


Figura 3.6. ***Correspondencia de mejor respuesta del jugador*** I.Si el jugador I asigna una probabilidad mayor de 0.5 a que el jugador II elija una determinada estrategia, su mejor respuesta es jugar con probabilidad 1 esa misma estrategia (I gana si los dos eligen P o los dos eligen N).Únicamente en el caso de que crea igual de probable que el otro elija cualquiera de las dos estrategias tendría más de una respuesta óptima, de hecho tendría infinitas: su ganancia esperada es la misma elija la mixta que elija.

Si nos ponemos ahora en lugar del jugador II y repetimos el procedimiento anterior, obtenemos como correspondencia de mejor respuesta:

$$B_{II}(\sigma_{I)} \equiv q^*(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p > 0.5 \\ \text{cualquier } p \in [0,1], & \text{si } p = 0.5 \\ 1, & \text{si } p < 0.5, \end{cases} \tag{3.4}$$

la cual aparece representada en la Figura 3.7

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

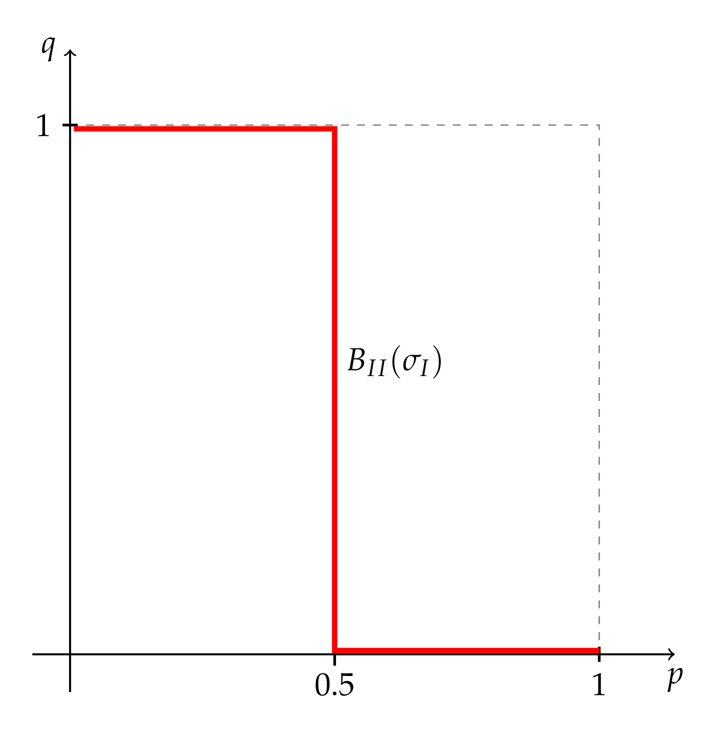


Figura 3.7. ***Correspondencia de mejor respuesta del jugador*** II.

Una vez tenemos las correspondencias de mejor respuesta para ambos jugadores, estamos ya en condiciones de determinar si existen o no equilibrios de Nash en estrategias mixtas para este juego. Ampliando el concepto visto de estrategias puras al caso de mixtas, un par de estrategias $(\hat{\sigma}_I, \hat{\sigma}_{II})$ será un equilibrio de Nash si se cumple simultáneamente que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_I &\in B_I(\hat{\sigma}_{II}) \\ \hat{\sigma}_{II} &\in B_{II}(\hat{\sigma}_I) \end{aligned}$$

La Figura 3.8 nos permite apreciar como estas condiciones solo se cumplen cuando cada jugador elige la estrategia mixta $(0.5, 0.5)$, esto es, adopta la regla de jugar cada una de sus dos estrategias con la misma probabilidad. Podríamos decir que en el único equilibrio de Nash del juego ambos jugadores se comportan de manera totalmente *impredecible*, en el sentido de que eligen una regla de comportamiento que asigna la misma probabilidad a cada una de sus estrategias puras. Podemos interpretar también este equilibrio en términos de la incertidumbre que a los jugadores les interesa crear en su rival. Que el EN sea $(0.5, 0.5)$ nos recuerda que no es suficiente con crear incertidumbre en el rival sobre la estrategia pura que eligiremos, sino que la incertidumbre creada deber ser tal que el rival crea que es igual de probable que juguemos cualquiera de nuestras dos estrategias puras. En muchos juegos de envite o incluso en las competiciones deportivas, el comportamiento óptimo de los jugadores es «mezclar» adecuadamente entre las distintas acciones que pueden llevar a cabo (echar un farol en un juego de envite, elegir el tipo de golpe por parte de un jugador de tenis,...).

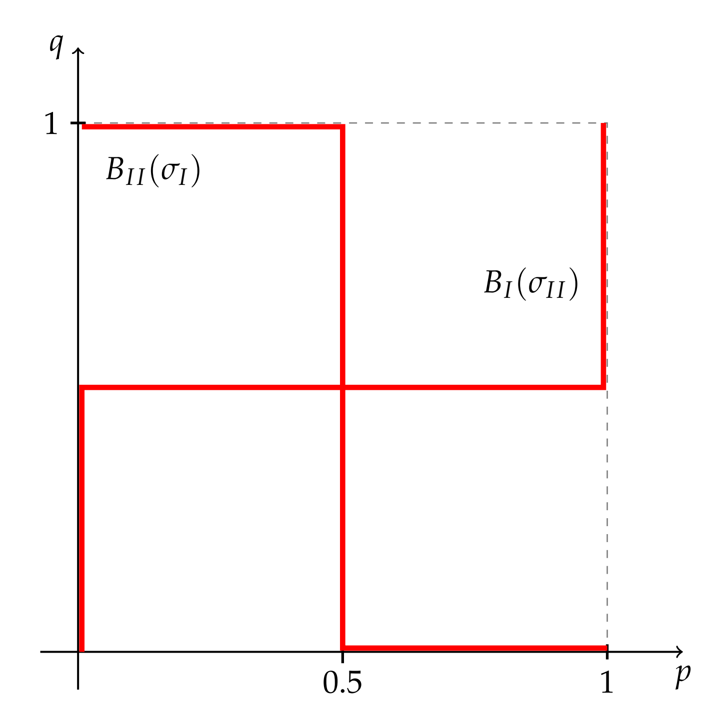


Figura 3.8. ***Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego «pares o nones».***

► Ejercicio 3.3.1

Para cada uno de los juegos que aparece en la figura adjunta, determine:

1. la correspondencia de mejor respuesta de cada uno de los jugadores;
2. los equilibrios de Nash tanto en estrategias puras como en mixtas.

	F	**T**
F	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

	P	*H*
P	3, 3	1, 5
H	5, 1	0, 0

Figura 3.9. Matrices de pagos para los juegos «la batalla de los sexos» (izquierda) y «halcón o paloma» (derecha).

3.3.2 Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: planteamiento general

Definición de estrategias mixtas

Dado un juego en forma estratégica $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$ y dado el conjunto de estrategias puras de uno cualquiera de los jugadores $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK}\}$, se define una estragia mixta para dicho jugador como una distribución de probabilidad sobre S_i:

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iK}), \qquad \sum_k \sigma_{ik} = 1;$$

donde $\sigma_{ik} \equiv Pr[s_i = s_{ik}]$, esto es, cada elemento de σ_i representa la probabilidad que el jugador i asigna a su estrategia pura s_k.

En este marco ampliado, en el que los jugadores pueden elegir estrategias mixtas, designaremos por $\boldsymbol{\sigma}$ a una combinación de estrategias mixtas (una para cada jugador).

Al ampliar el espacio de elección de los jugadores incluyendo la posibilidad de que elijan estrategias mixtas, con cada combinación de estrategias, $\boldsymbol{\sigma}$, no irá asociado un desarrollo del juego, sino distintos desarrollos cada uno de ellos con una determinada probabilidad. Abusando de la notación, podemos expresar la ganancia esperada [6] del jugador i cuando cada uno de los jugadores elige una estrategia mixta σ_j como:

$$V_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{s}} \left[\prod_j P_{\sigma}^j(\mathbf{s}) U_i(s) \right],$$

esto es, la ganancia esperada para el jugador i será una suma ponderada de las ganancias asociadas a cada posible combinación de estrategias puras $\mathbf{s}$, donde las ponderaciones vienen dadas por la probabilidad de que el juego se desarrolle conforme a dicha combinación de estrategias puras. En la medida que los jugadores eligen de manera independiente, la probabilidad de que el juego se desarrolle conforma a $\mathbf{s}$ será el producto de las probabilidades que cada jugador j asigna a la estrategia s_j que forma parte de $\mathbf{s}$.

[6] La elección de una estrategia mixta por parte del jugador i lleva asociada para él una *lotería* que tiene por soporte las ganancias asociadas a cada combinación de estrategias puras. Como señalabamos en el Tema 1, procederemos suponiendo que los jugadores tienen como objetivo maximizar su ganancia esperada, supuesto que tiene dos posibles justificaciones:

- considerar que los jugadores son neutrales al riesgo, esto es, que sólo se fijan en su ganancia (monetaria) esperada.
- considerar que los pagos que asociados a cada combinación de estrategias puras vienen dados en valores de una función de utilidad cardinal. En este caso, los jugadores estaría deciendo conforme al criterio de maximizar la utilidad esperada.

▶ **Ejercicio 3.3.2**

Considere el juego «Papel, piedra o tijeras» con el supuesto adicional de que si uno de los jugadores pierde ha de pagar 10 € al otro. Se pide:

1. Defina una estrategia mixta para cada uno de los jugadores.
2. Represente la ganancia esperada de cada uno de los jugadores como una suma ponderada de las ganancias asociadas a cada combinación de estrategias puras.
3. Este juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ¿Cuál cree que es? ¿Cuál es la ganancia esperada para un jugador en dicho equilibrio?

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Definición 3.3.1 (Equilibrio de Nash en estrategias mixtas) *Dado un juego en forma normal,* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$*, una determinada combinación de estrategias mixtas* $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n)$ *constituye un* ***equilibrio de Nash en estrategias mixtas*** *del mismo sí y sólo sí:*

$$V_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}) \geq V_i(\sigma_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}), \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \quad \forall i.$$

Como vimos en el ejemplo con el que comenzábamos esta sección, al menos para los juegos $2X2$ es posible determinar los equilibrios de Nash en estrategias mixtas mediante un proceso similar a como lo hacíamos en el caso de las puras:

1. determinamos la correspondencia de mejor respuesta de cada jugador $B_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i})$;
2. serán equilibrios de Nash aquellas combinaciones de estrategias mixtas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ que pertenezcan simultáneamente a todas las correspondencias de mejor respuesta:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \text{ EN} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_i \in B_i(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}); \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Existe, sin embargo, un procedimiento alternativo que se fundamenta en el hecho de que la ganancia esperada de cualquier estrategia mixta es la suma ponderada (por las probabilidades correspondientes) de las ganancias asociadas a sus estrategias puras:

$$V_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{s_i \in \mathbf{S}_i} P_i[s_i] V_i(s_i, \boldsymbol{\sigma_{-i}}),$$

donde $P_i[s_i]$ es la probabilidad que asigna i a su estrategia pura s_i y donde $V_i(s_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i})$ recoge la ganancia esperada del jugador i cuando él elige la estrategia pura s_i y el resto de jugadores la combinación de estrategias mixtas $\boldsymbol{\sigma_{-i}}$. Como consecuencia de ello, **para que una estrategia mixta $\hat{\sigma}_i$ forme parte de un equilibrio de Nash, todas las estrategias puras a las que asigna probabilidad positiva deberán tener la misma ganancia esperada** (en caso

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

contrario existiría mejores respuestas que esa: aquellas estrategias mixtas que reasignaran la probabilidad de las estrategias puras con ganancias esperadas más bajas a las estrategias puras con ganancias esperadas más altas).

A modo de ejemplo, si aplicamos esto al juego «pares o nones», tendríamos que para el jugador I se debería cumplir:

$$V_I(P, \sigma_{II}) = V_I(N, \sigma_{II}) \Longleftrightarrow q(1) + (1-q)(-1) = q(-1) + (1-q)(1),$$

condición que nos permite derivar un único valor de q que es justamente el asociado a la estrategia mixta del jugador II en el único equilibrio de Nash del juego $\hat{\sigma}_{II} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

A su vez para el jugador II se debería cumplir:

$$V_{II}(\sigma_I, P) = V_{II}(\sigma_I; N) \Longleftrightarrow p(-1) + (1-p)(1) = p(1) + (1-p)(-1),$$

condición que nos permite determinar en este caso $\hat{\sigma}_I$.

▶ Ejercicio 3.3.3

Utilice el procedimiento anterior para determinar el equilibrio de Nash en mixtas del juego «halcón o paloma» y del juego «papel,piedra o tijeras».

Estrategias mixtas y dominancia

En el Tema 2 definimos el concepto de dominancia aplicado únicamente al caso de estrategias puras. Una estrategia pura dominaba a otra si daba mayor ganancia que ella fuese cuál fuese la combinación de estrategias elegida por los otros jugadores. Vamos a extender ahora ese el concepto de dominancia al caso en el que los jugadores pueden elegir estrategias mixtas:

Definición 3.3.2 (Dominancia en estrategias mixtas) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$, una estrategia pura $\bar{s}_i$ esta dominada para el jugador i si existe otra estrategia (pura o mixta) $\bar{\bar{\sigma}}_i \in \Delta(S_i)$ tal que $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \mathbf{s}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i})$, $\forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$.*

La condición ahora para que una estrategia mixta domine a una pura es, por tanto, que la ganancia esperada jugando la mixta sea mayor que la ganancia esperada jugando la pura, sean cuales sea cual sea las estrategias puras elegidas por los otros jugadores.

▶ Ejercicio 3.3.4

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Tomando como referencia un juego sencillo con dos jugadores y tres estrategias para cada uno de ellos, demuestre que si se cumple $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \mathbf{s}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i})\ \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, entonces también se cumplirá que $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i})\ \forall \boldsymbol{\sigma}_{-i} \in \Delta(S_{-i})$.

Nos encontraremos, por tanto, con situaciones en las cuales una estrategia pura esta dominada por una estrategia mixta aún cuando no lo este por ninguna otra estrategia pura. Consideremos, a modo de ejemplo, en el juego representado en la Figura 3.10. Claramente no existe ninguna estrategia pura que este dominada por otras estrategias puras para ninguno de los jugadores. Sin embargo, es inmediato comprobar que, para el jugador I, existen estrategias mixtas que dominan a la estrategia pura B, por ejemplo la estrategia mixta $\sigma_I = (.5, .5)$ que asigna la misma probabilidad a sus estrategias A y M.

▶ Ejercicio 3.3.5

Determine todas las estrategias mixtas que dominan a la estrategia pura B en el juego de la Figura 3.10.

Revisión de la relación entre estrategias dominadas y estrategias mejor respuesta

Una vez consideramos la posibilidad de que los jugadores elijan estrategias mixtas, hemos de reconsiderar la relación que habíamos visto en el Tema 2 entre estrategias dominadas y estrategias mejor respuesta. Cuando sólo considerábamos estrategias puras, veíamos que podían existir estrategias que sin estar dominadas por otras no fuesen mejor respuesta bajo ninguna de las posibles expectativas que se pudiera formar el jugador correspondiente. La pregunta que nos falta por responder es qué ocurrirá ahora si eliminamos, no sólo las estrategias que están dominadas por otras puras, sino también todas aquellas otras que estén dominadas por una mixta. La respuesta, que no entramos a demostrar, es que para juegos con solo dos jugadores, si ampliamos el espacio de elección incluyendo las estrategias mixtas el conjunto de estrategias no dominadas para un jugador coincide con el conjunto de estrategias que son mejor respuesta bajo alguna de sus posibles expectativas. En otras palabras, **en un juego con dos jugadores, si una estrategia pura no está dominada (ni por una pura ni por una mixta) existirán unas expectativas bajo las cuales es mejor respuesta**. En consecuencia, para juegos con dos jugadores el conjunto de estrategias racionalizables para cada uno de ellos puede determinarse aplicando la eliminación iterativa de estrategias dominadas (por otras estrategias puras o mixtas).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 3.3.6

Para el juego de la figura adjunta hemos demostrado en el Tema 2 que la estrategia s_{I3} no es mejor respuesta para el jugador I bajo ninguna de las posibles expectativas que se podría formar acerca de lo que hará el II. Demuestre que existe una estrategia mixta para dicho jugador que domina a la estrategia s_{I3}.

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$10, 2$	$0, 4$
s_{I2}	$0, 1$	$10, 3$
s_{I3}	$4, 8$	$4, 0$

Figura 3.10. Mejor respuesta frente a dominancia estricta

La relación entre dominancia y mejor respuesta es un poco más complicada en el caso de juegos con más de dos jugadores, por lo que no entramos en ella por el momento[7].

[7]La mayor dificultad va asociada al tipo de expectativas que consideremos se puede formar cada jugador sobre lo que harán los otros, en particular, la posibilidad de que crea que el comportamiento de *los otros* esta correlacionado.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.4 El equilibrio de Nash como concepto de solución

3.4.1 Interpretación del equilibrio de Nash como concepto de solución

Como ya hemos comentado anteriormente, el equilibrio de Nash como concepto de solución parte de un enfoque diferente a al de la racionalizabilidad. En este último caso lo único que exigimos es que los jugadores incorporen en sus expectativas el hecho de que la racionalidad es conocimiento común (que anticipen que los otros no jugarán estrategias dominadas, que anticipen que los otros anticiparán que él no va a jugar estrategias dominadas,...). En cambio, utilizar el equilibrio de Nash como concepto de solución supone exigir que **las expectativas de cada jugador sobre el comportamiento de resto sean correctas**. ¿Cómo puede justificarse esa consistencia en las expectativas de todos los jugadores? En la medida que estamos estudiando juegos estáticos, dichas expectativas no pueden tener su origen en el conocimiento previo que tengan unos jugadores de otros. Entre las posibles justificaciones de esa consistencia entre expectativas y estrategias cabe destacar las siguientes:

- la experiencia acumulada de enfrentarse a situaciones similares de manera repetida en el tiempo con otros jugadores o la información recibida de otros jugadores que se han enfrentado a esa situación;
- la comunicación previa al juego.

En relación con la comunicación previa al juego, podemos pensar en una situación en la cual los jugadores pueden enviarse mensajes antes de elegir una estrategia o incluso pueden negociar entre ellos. En este caso, si se pusiesen de acuerdo sobre una forma conjunta de comportarse, esta debería ser un equilibrio de Nash: tiene la propiedad de que existen incentivos para que cada jugador elija la estrategia acordada.

Sin embargo, como señalamos al principio del tema, en la mayoría de las ocasiones tomaremos como supuesto básico que **las expectativas de los jugadores tienen su origen en su experiencia previa derivada de enfrentarse a situaciones de interdependencia estratégica similares**. Cada jugador tiene experiencia suficiente como para anticipar de manera correcta como jugarán los otros jugadores. Resulta útil pensar en unas condiciones ideales en las cuales para cada jugador existe una población de individuos que puede adoptar ese papel (la misma población en juegos simétricos). Cada vez que se produce la situación de interdependencia estratégica un jugador de cada tipo es elegido al azar de la correspondiente población, de tal manera que cada jugador se enfrenta a una misma situación, pero con rivales distintos cada vez. Esto hace que cada jugador se forme unas expectativas sobre lo que hace el rival típico en una situación de ese tipo, no sobre lo que hacen rivales concretos (en este caso deberíamos modelizarlo como un juego dinámico en el cuál los jugadores tienen en cuenta los efectos futuros de las decisiones actuales). Interpretado así, el equilibrio de

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Nash se corresponde con un **estado estacionario**: si cada vez que se produce esa situación de interdependencia estratégica se desarrolla conforme a $\hat{\mathbf{s}}$ no existe fuerza alguna que tienda a cambiar la forma de *jugar* de los participantes. En otras palabras, el equilibrio de Nash vendría a ser una norma social estable: si todo el mundo la sigue nadie tiene incentivos a desviarse [8]. La forma de justificar la estabilidad del comportamiento puede variar de una situación a otra.

Si se propone una combinación de estrategias como solución *estable* de un juego, el que sea equilibrio de Nash es una **condición necesaria** que debemos imponerle. En caso de que la solución propuesta no fuese equilibrio de Nash, deberíamos justificar el hecho de que al menos un jugador no este adoptando la mejor respuesta al comportamiento de resto. Sin embargo, puede haber situaciones de interdependencia estratégica en las que un posible desarrollo del juego no sea un buen candidato a solución a pesar de ser un equilibrio de Nash (que sea equilibrio de Nash no es condición suficiente para ser solución).

3.4.2 Existencia del equilibrio de Nash

Nash (1950) demostró que todo juego finito (ha de serlo S, esto es, el número de jugadores y el espacio de estrategias de cada uno de ellos) tiene almenos un equilibrio de Nash, que puede serlo en estrategias mixtas. Este resultado se conoce como **teorema de Nash**.

▶ Ejercicio 3.4.1

Demuestre el teorema de Nash para juegos 2X2 utilizando la siguiente representación general:

	$\mathbf{S_{II1}}$	$\mathbf{S_{II2}}$
$\mathbf{S_{I1}}$	a, α	b, β
$\mathbf{S_{I2}}$	c, γ	d, δ

Figura 3.11. Una matriz de pagos generalizada para juegos 2X2.

[8] A modo de ejemplo, en el equilibrio de Nash del modelo de Cournot cada una de las empresas comprobaría *ex post* que al precio que se realiza en el mercado no tiene ningún incentivo en cambiar la cantidad que saca al mercado. De la misma manera, en el ejercicio sobre el reparto del tráfico entre dos vías alternativas en el equilibrio de Nash ningún conductor tendría incentivos a cambiar de ruta.

Suponga que todos los parámetros son positivos y que $a \neq c, b \neq d; \alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$.

3.4.3 Unicidad y selección de equilibrios

Es habitual encontrarnos con juegos que presentan más de un equilibrio de Nash. En relación con ello debemos recordar que resulta útil considerar el equilibrio de Nash como una condición necesaria, pero no suficiente, para proponer una combinación de estrategias como solución de un juego. Ante la presencia de varios equilibrios de Nash existen dos grandes grupos de aproximaciones para seleccionar alguno de ellos como solución:

1. **Incorporando información adicional a la recogida en el juego**. Un juego supone una abstracción de la situación real de interdependencia estratégica y el proceso de abstracción puede suponer la eliminación de información útil para ayudarnos a seleccionar un equilibrio de Nash. A modo de ejemplo, la posibilidad de que los jugadores puedan comunicarse o negociar entre ellos con anterioridad al desarrollo del juego, la presencia de convenciones sociales o de puntos focales, el aprendizaje de experiencias pasadas, la evolución, . . . pueden fundamentar la elección de uno de los equibrios de Nash como solución.

2. **Imponiendo restricciones teóricas adicionales (*refinamientos* del equilibrio de Nash)**. En los temas siguientes veremos algunos ejemplos como la *perfección en subjuegos* o el equilibrio secuencial.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.5 Aplicación I: El modelo de oligopolio de Cournot

3.5.1 Introducción

3.5.2 Modelo de duopolio con demanda lineal y rendimientos constantes a escala

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, A y B. Los costes para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dados por una fución $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad \text{para} \quad i = A, B. \tag{3.5}$$

El producto se vende en el mercado a un precio único que quedará determinado conjuntamente por la cantidad total puesta en el mercado por ambas empresas y por la demanda del mismo, la cual vamos a suponer también lineal:

$$p = a - bX. \tag{3.6}$$

Esta función inversa de demanda recoge simplemente una dependencia negativa del precio que alcanzará el producto en el mercado con la cantidad total que pongan en el mismo entre las dos empresas $X = x_A + x_B$.

Vamos a representar esta situación de ID como un juego en forma normal como paso previo a la determinación del EN del mismo.

Representación en forma normal

- $J = \{A, B\}$.
- $S_i = \{x_i : x_i \geq 0\} \quad \text{para} \quad i = A, B.$
- $\pi_i(x_i, x_j) = x_i[a - b(x_i + x_j) - c] \quad \text{para} \quad i = A, B, \;\; i \neq j.$

Una vez tenemos planteada la situación de ID como un juego, podemos recurrir al procedimiento habitual para determinar el EN:

Determinación del equilibrio de Nash

Funciones de mejor respuesta $B_i(x_j)$ Cada empresa tiene que decidir la cantidad de producto que saca al mercado sin conocer que cantidad sacará la otra. Podemos plantear su

problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i, x_j) = \max_{x_i} x_i[a - b(x_i + x_j) - c]. \tag{3.7}$$

Dado que la función objetivo es cóncava, la condición de primer orden será a la vez necesaria y suficiente:

$$\frac{d\pi_i}{dx_i}(x_i^*, x_j) = a - 2bx_i^* - bx_j - c = 0.$$

Como podemos apreciar, dicha condición no nos dará una única cantidad óptima, sino una distinta para cada posible cantidad que saca la otra empresa x_j. Se trata, pues, de una función de mejor respuesta, que podemos hacer explícita sin más que despejar x_i^*:

$$x_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_j. \tag{3.8}$$

Equilibrio de Nash Tenemos por tanto una función de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$x_A^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_B \tag{3.9}$$

$$x_B^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_A. \tag{3.10}$$

El equilibrio de Nash del juego vendrá dado por un par de cantidades $(\hat{x}_A, \hat{x}_B)$ que sean simultáneamente mejor respuesta para las dos empresas, esto es, se ha de cumplir que:

$$\hat{x}_A = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\hat{x}_B \tag{3.11}$$

$$\hat{x}_B = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\hat{x}_A. \tag{3.12}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos como único equilibrio de Nash $\hat{x}_a = \hat{x}_B = \frac{a-c}{3b}$.

Valoración de los resultados de equilibrio

La cantidad total sacada al mercado en el equilibrio de Nash es

$$\hat{X} = \hat{x}_a + \hat{x}_B = \frac{2(a-c)}{3b},$$

vaciándose el mercado para un precio

$$p = \left[a - b\left(\frac{2(a-c)}{3b}\right)\right] = \frac{a+2c}{3} = c + \frac{a-c}{3}.$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

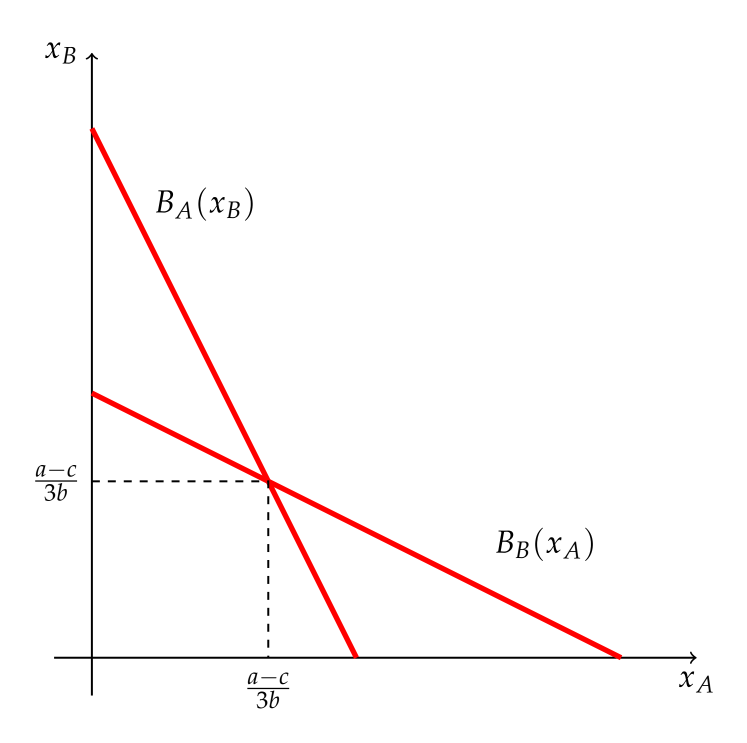


Figura 3.12. ***Equilibrio de Cournot Nash.***Únicamente cuando cada empresa esta sacando al mercado una cantidad $x_i = \frac{a-c}{3b}$ se cumple que cada una de ellas esta respondiendo óptimamente a la cantidad que saca la otra.

Por tanto, en el equilibrio los beneficios de cada empresa vendrán dados por:

$$\pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \left(\frac{a-c}{3b}\right)\left(\frac{a-c}{3}\right) = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Podemos comparar estos resultados de equilibrio con los que se darían bajo el supuesto de que el mercado fuese de competencia perfecta. En este caso la libertad de entrada y salida haría que el precio de equilibrio a largo plazo coincidiese con el coste unitario de producción, $p = c$, siendo la cantidad total intercambiada $X(c) = \frac{a-c}{b}$. Si consideramos el otro extremo, con el mercado controlado por un monopolista, podemos plantear su problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i) = \max_{x_i} [a - bx_i - c].$$

Aplicando la condición de primer orden, obtenemos como cantidad óptima a sacar al mercado $X_M = \frac{a-c}{2b}$, siendo el precio que vaciaría el mercado $p_M = \frac{a+2c}{2} = c + \frac{a-c}{2}$.

La siguiente tabla permite recoge de manera esquemática la comparación entre los resultados de equilibrio de las tres estructuras de mercado.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	Cournot	Competencia perfecta	Monopolio
$\hat{\mathbf{x}}$	$\frac{2}{3}\frac{(a-c)}{b}$	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$
$\hat{\mathbf{p}}$	$c+\frac{a-c}{3}$	c	$c+\frac{a-c}{2}$
$\hat{\Pi}_i$	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	0	$\frac{(a-c)^2}{8b}$

Cuadro 3.1. ***El equilibrio de Cournot-Nash en duopolio: comparación con los resultados del equilibrio competitivo y del monopolio.*** La cantidad sacada al mercado en el equilibrio de Cournot-Nash es menor que la del equilibrio competetivo y mayor que la que maximiza el beneficio del monopolista, ocurriendo obviamente lo contrario con el precio.

▶ Ejercicio 3.5.1

Considere un mercado abastecido por dos únicas empresas, A y B, en el que se dan las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$\begin{aligned} D: \quad & p = && 26 - X \\ C: \quad & CT_i(x_i) = && 2x_i, \quad \text{para} \quad i = A, B. \end{aligned}$$

1. Suponga que ambas empresas han de decidir simultáneamente la cantidad que sacan al mercado y determine la solución de Cournot-Nash.
2. Responda a las preguntas de los dos apartados anteriores para el caso en que en el mercado participan tres empresas idénticas, A,B y C, en lugar de dos.

▶ Ejercicio 3.5.2 Modelo de duopolio de Cournot con costes asimétricos

Determine el equilibrio de Nash para el modelo de duopolio de Cournot visto anteriormente, pero bajo el supuesto de que las empresas tienen costes de producción unitarios distintos:

$$CT_1(x_1) = c_1 x_1; \quad CT_2(x_2) = c_2 x_2; \quad c_2 > c_1.$$

▶ Ejercicio 3.5.3

Suponga que cada una de las empresas además del coste unitario de producción c tiene un coste adicional por unidad asociado al transporte, el almacenaje, un impuesto . . . En este caso la función de costes totales sería de la forma $CT_i(x_i) = \tilde{c}x_i$, donde $\tilde{c} = c + t$ es

el coste unitario *generalizado*. Se pide:

1. Determine el equilibrio de Cournot-Nash
2. Suponga que se produce una variación en t y determine que proporción de dicha variación se trasladará al precio de mercado.

3.5.3 Generalización a n empresas

El modelo anterior se extiende fácilmente al caso en que existe un número indeterminado de empresas n. Seguimos suponiendo que las condiciones de costes de cada una de las empresas quedan recogidas por la función:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Esto es, todas las empresas son capaces de producir a un coste unitario de $c \;\; um$ con independencia del volumen de producción que elijan.

El precio del producto quedará ahora determinado por la cantidad sacada entre las n empresas y la disposición a pagar de los consumidores, estando recogida esta última a través de la siguiente función (inversa) de demanda:

$$p = a - bX, \quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.14}$$

Representación en forma normal

- $J = \{1, \cdots, n\}$.
- $S_i = \{x_i : x_i \geq 0\}, \quad$ para $\quad i = 1, \cdots, n$.
- $\pi_i(x_i, x_{-i}) = x_i[a - b(x_i + \sum_{j \neq i} x_j) - c], \quad$ para $\quad i = 1, \cdots, n$.

Determinación del equilibrio de Nash

Funciones de mejor respuesta $B_i(x_{-i})$ Cada empresa tiene que decidir la cantidad de producto que saca al mercado sin conocer que cantidad sacarán las demás. Podemos plantear su problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i, \sum_{j \neq i} x_j) = \max_{x_i} x_i[a - b(x_i + \sum_{j \neq i} x_j)) - c]. \tag{3.15}$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Dado que la función objetivo es cóncava, la condición de primer orden de este programa será a la vez necesaria y suficiente:

$$\frac{d\pi_i}{dx_i}(x_i^*, \sum_{j\neq i} x_j) = a - 2bx_i^* - b\sum_{j\neq i} x_j - c = 0.$$

Como podemos apreciar, dicha condición no nos dará una única cantidad óptima, sino una distinta para cada posible cantidad sacada al mercado por el resto de empresas $\sum_{j\neq i} x_j$. Se trata, pues, de una función de mejor respuesta, la cual podemos hacer explícita sin más que despejar x_i^*:

$$x_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} x_j. \tag{3.16}$$

Equilibrio de Nash El equilibrio de Nash del juego vendrá dado por el vector de cantidades $(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ que sean simultáneamente mejor respuesta para todas las empresas, esto es, el vector de cantidades que satisface el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\hat{x}_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \hat{x}_j. \quad \text{para } i = 1, \cdots, n. \tag{3.17}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos como único equilibrio de Nash:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}, \quad \forall i$$

.

Valoración de los resultados de equilibrio

La cantidad total sacada al mercado en el equilibrio de Nash es

$$\hat{X} = n\hat{x}_i = \frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b},$$

vaciándose el mercado para un precio

$$p = \left[a - b\left(\frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b}\right)\right] = \frac{a+nc}{n+1} = c + \frac{a-c}{n+1}.$$

Por tanto, en el equilibrio los beneficios de cada empresa vendrán dados por:

$$\pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \left(\frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{a-c}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{(a-c)^2}{b}.$$

Podemos comprobar que a medida que aumenta el número de empresas la cantidad total

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

sacada al mercado aumenta y tiende a la que se sacaría bajo las condiciones de competencia perfecta. De hecho, se cumple que $\lim_{n\to\infty} \hat{X} = \frac{a-c}{b}$. De la misma manera a medida que aumenta el número de empresas el precio tiende al coste unitario de producción y los beneficios extraordinarios tienden a desaparecer.

► **Ejercicio 3.5.4**

Considere que el modelo anterior de oligopolio de Cournot con n empresas y analice los efectos sobre la situación de equilibrio del establecimiento de un impuesto de $t \;\; um$ por unidad producida. En particular, demuestre que la repercusión de dicho impuesto sobre el precio de equilibrio será tanto mayor cuanto mayor sea n.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.6 Aplicación II: El modelo de oligopolio de Bertrand

3.6.1 Introducción

En el modelo de Cournot las empresas elegían la cantidad que deseaban sacar al mercado, determinándose en éste el precio de venta. En 1883 Bertrand propuso un modelo alternativo en el que cada empresa elige el precio, produciendo a continuación la cantidad que le demanden al mismo.

3.6.2 Un modelo básico

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, A y B. Los costes para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dados por una fución $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad \text{para} \quad i = A, B. \tag{3.18}$$

La relación que guarda la cantidad total que desearán comprar los consumidores con el precio viene dada por:

$$X_D = a - bp \quad \text{donde} \quad p = \text{mín}\{p_A, p_B\}. \tag{3.19}$$

Suponemos, además, que en el caso de que las dos empresas fijen el mismo precio, se repartirán las ventas a partes iguales.

Representación en forma normal

Jugadores $J = \{A, B\}$.

Estrategias $S_i = \{p_i : p_i \geq 0\} \quad \text{para} \quad i = A, B.$

Funciones de pagos

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_j < p_i \\ \frac{1}{2}(p - c)(a - bp) & \text{si} \quad p_i = p_j = p \\ (p_i - c)(a - bp_i) & \text{si} \quad p_j > p_i \end{cases}$$

para $\quad i = A, B, \;\; i \neq j.$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Determinación del equilibrio de Nash

En el modelo de Cournot obteníamos la función de mejor respuesta de cada empresa a partir de las condiciones de primer orden, esto es, de la diferenciación de la función de beneficios. En este caso nos encontramos, sin embargo, con que la función de beneficios es discontinua, por lo que no podemos recurrir a diferenciarla para obtener la función de mejor respuesta. Podemos, sin embargo, proceder de una manera más informal y determinar cual sería la mejor respuesta de una de las empresa i en función del precio p_j que fije su rival.

- Consideremos primero que ocurriría si, por la razón que fuese, $p_j < c$. En este caso a la empresa i no le interesa participar en el mercado ya que sólo podría hacerlo a un precio que le daría pérdidas. En términos del modelo, su mejor respuesta sería elegir cualquier precio p_i que cumpliese $p_i > p_j$, por ejemplo $p_i = c$.

- Para $p_j > c$ la empresa puede obtener beneficios positivos fijando un precio por debajo del de su rival. Siempre que p_j sea inferior al precio de monopolio, la empresa i podría quedarse con todo el mercado fijando un precio ligeramente inferior, digamos $p_j - \varepsilon$. De esta manera la empresa i conseguiría unos beneficios[9]:

  $$\pi_i(p_j - \varepsilon, p_j) = [(p_j - \varepsilon) - c][a - b(p_j - \varepsilon)]$$

  .

  Hemos condicionado que $p_j - \varepsilon$ sea la mejor respuesta de i a que p_j sea inferior al precio de monopolio p_m. Es suficiente con tener en cuenta que p_m es el precio que permitiría obtener el mayor beneficio del mercado a una empresa que lo controlase, para darse cuenta que si $p_j > p_m$ entonces la mejor respuesta de i sería fijar $p_i = p_m$.

- Nos queda únicamente por determinar cual sería la mejor respuesta de la empresa i en el caso concreto de que $p_j = c$. Dado que fijar un precio $p_i < p_j$ llevaría a obtener pérdidas, la mejor respuesta será fijar $p_i \geq p_j$, que llevará a la empresa a obtener unos beneficios nulos.

La revisión exhaustiva de las mejores respuestas para todos los posibles valores de p_j nos ha permitido determinar la siguiente correspondencia de mejor respuesta:

[9]Siendo rigurosos con el planteamiento formal del modelo, no existe una mejor respuesta por parte de la empresa i, ya que la maximización de beneficios requiere que p_i este tan próximo a p_j como sea posible (que ε sea tan pequeño como sea posible). Nosotros suponemos que existe ε es suficientemente pequeño como para que a la empresa i no le interese acercarse más a p_j.

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\} & \text{si} \quad p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\} & \text{si} \quad p_j = c \\ p_j - \varepsilon & \text{si} \quad c < p_j \leq p_m \\ p_m & \text{si} \quad p_j > p_m. \end{cases} \tag{3.20}$$

para $\quad i = A, B, \ i \neq j.$

A partir de estas funciones de mejor respuesta es inmediato comprobar que solo existe una combinación de estrategias que es EN: aquella en que ambas empresas están fijando un precio igual al coste de producción $\hat{p}_i = \hat{p}_j = c$.

▶ Ejercicio 3.6.1

Represente gráficamente las correspondencias de mejor respuesta del modelo anterior.

El hecho de que, a pesar de existir dos únicas empresas, en el único equilibrio de Nash de este modelo se alcance un resultado eficiente, hace que se hable de la *la paradoja de Bertrand*. En efecto, el *atomismo* de los agentes y su comportamiento precio-aceptante como origen de la competencia y del logro de la eficiencia en los mercados, parecen ser puestos en entredicho por este modelo: incluso en un mercado con dos únicas empresas, si éstas compitiesen «à la Bertrand» se alcanzarían los mismos resultados que en el equilibrio competitivo de largo plazo. Sin embargo, esta aparente paradoja se debe más bien a la falta de realismo del modelo de Bertrand que hemos analizado. La competencia en precios en el mundo real se da en un marco estratégico muy diferente del que hemos analizado, en el cual las empresas tienen que decidir de forma simultánea y sabiendo que no se van a volver a encontrar en el futuro. Esa falta de realismo del marco estratégico, también se extiende a las condiciones de demanda y de costes. Por el lado de la demanda, lo habitual es que exista un cierto grado de diferenciación del producto, lo que confiere a cada empresa un cierto grado de poder de mercado. Por el lado de los costes, una extensión lógica es considerar que ocurriría si las empresas tuviesen una capacidad limitada, cuestión que se aborda en otro modelo clásico de oligopolio, el de Edgeworth. En definitiva, la principal utilidad del modelo de Bertrand que acabamos de ver, es su uso como referencia para la elaboración de otro modelos más realistas a la hora de recoger el marco estratégico y las condiciones de demanda y de costes a las que se enfrentan las empresas en un oligopolio.

▶ Ejercicio 3.6.2 Modelo de Bertrand con producto diferenciado

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Considere una situación de duopolio en el que las empresas eligen el precio de su producto bajo las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$\begin{aligned} D: \quad & x_{di} = & \alpha - \beta p_i + \delta p_j \;\; \alpha, \beta, \gamma > 0.\; i, j = 1, 2, i \neq j. \\ C: \quad & CT_i(x_i) = & c x_i, \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

- Represente la situación anterior como un juego en forma estratégica
- Determine las funciones de mejor respuesta de cada empresa y represéntelas gráficamente.
- Determine el equilibrio de Nash del juego.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.7 La sobreutilización de los recursos públicos: el problema de los ejidos

Gibbons págs. 27-29.

3.8 Ejercicios

▶ Ejercicio 3.8.1

Determine los equilibrios de Nash del siguiente juego:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	3, 7	1, 5	5, 5
s_{I2}	4, 4	1, 1	2, 6
s_{I3}	2, 2	4, 6	3, 4

Figura 3.13

▶ Ejercicio 3.8.2

Determine el equilibrio de Nash del siguiente juego en forma extensiva.

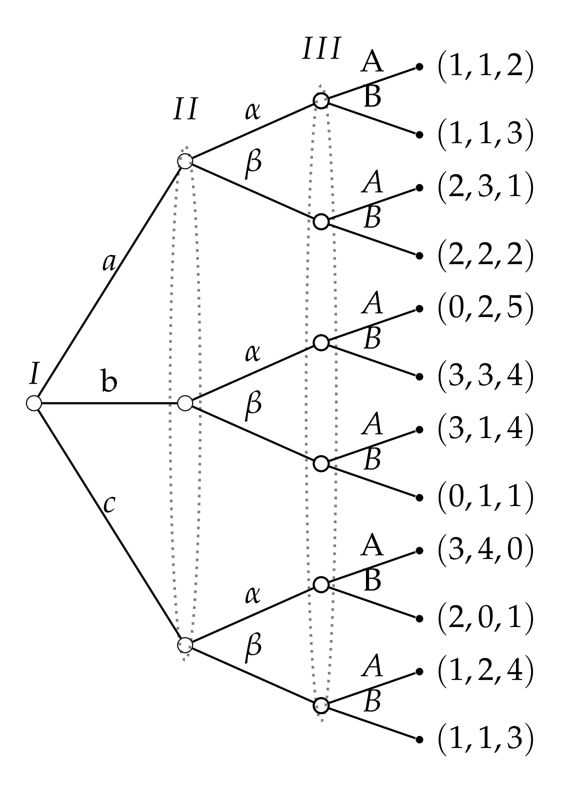


Figura 3.14. *Juego estático en forma extensiva.*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 3.8.3

A dos individuos se les ofrece la posibilidad de repartirse 100 *um* de acuerdo con el siguiente procedimiento. Cada uno de ellos tiene que solicitar de manera simultánea que proporción de esa cantidad pide para si mismo. Si las peticiones de los jugadores son compatibles se lleva a cabo el reparto, en caso contrario ninguno de los dos recibe nada. Construya las funciones de mejor respuesta de cada jugador, represéntelas gráficamente y determine el/los equilibrios de Nash del juego.

▶ Ejercicio 3.8.4

Determine todos los equilibrios de Nash del juego del ejercicio *la paradoja del presidente*.

▶ Ejercicio 3.8.5

Dos individuos disponen de una cantidad de 120 unidades de un bien X para consumir entre ambos a lo largo de dos periodos («hoy» y «mañana»). Cada uno de ellos ha de decidir de manera simultánea cuanto consume «hoy». En el caso de que la decisión de ambos sea compatible se lleva a cabo, y si entre ambos piden más de la cantidad disponible se reparten dicha cantidad a partes iguales. Si no agotan en el primer periodo las 120 unidades disponibles, en el periodo 2 se les da la mitad de lo que queda a cada uno. Las preferencias de los jugadores en relación con el consumo presente (x_1^i) y el consumo futuro (x_2^i) vienen dadas por la función:

$$U_i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i x_2^i \,; \quad i = 1, 2.$$

Determine la representación en forma estratégica del juego y el equilibrio de Nash del mismo. Comente a continuación los resultados, valorándolos en términos de eficiencia.

▶ Ejercicio 3.8.6

Considere los viajes por carretera en automóvil privado entre dos ciudades, A y B. Suponga que habitualmente se produce un desplazamiento de 1.000 personas en una determinada franja horaria desde A hacia B y que existen dos alternativas:

- la ruta Y, la cual no tiene problemas de capacidad, y por la que se tarda dos horas en llegar;
- la ruta Z, por la cual se puede llegar en una hora y media, pero sólo si el número de

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

vehículos que la utiliza durante esa franja horaria es inferior a 500. En caso de que la utilicen más vehículos se produce congestión y la duración del desplazamiento viene dada por la expresión $T_{AB} = 90 + .003(n - 500)^2$, donde n es el número de vehículos que elige dicha ruta.

1. ¿Cuántas personas eligen la ruta Z en el equilibrio de Nash de esta situación de interdependencia estratégica?

2. ¿Cuál es el número óptimo de vehículos que debería ir por cada ruta desde el punto de vista social bajo el supuesto de que el objetivo es minimizar el tiempo total empleado?

▶ Ejercicio 3.8.7

Dos socios, 1 y 2 participan en un determinado proyecto. Ambos acuerdan repartirse a medias el rendimiento que obtengan de dicho proyecto, el cual depende del esfuerzo de cada uno de ellos: $R(e_1, e_2) = 4(e_1 + e_2 + \alpha e_1 e_2)$, donde e_i es el nivel de esfuerzo realizado por el socio i. Suponga que $e_i \in [0, 4]$ y que $c \in [0, \frac{1}{4}]$. El coste para cada socio del nivel de esfuerzo que realice viene dado por: $C_i(e_i) = e_i^2; \quad i = 1, 2$. Suponga que es conocimiento común que cada socio elige el nivel de esfuerzo de manera simultánea y que el objetivo de ambos es maximizar el beneficio neto que obtienen. Se pide:

1. Interprete el significado del parámetro α.

2. Determine el nivel de esfuerzo que ejercerá cada uno de los agentes en el equilibrio de Nash.

3. Comente los resultados.

▶ Ejercicio 3.8.8

Considere una situación en la cual dos empresas se dedican a la explotación de los recursos pesqueros de un único lago. El volumen de capturas obtenido por ambas empresas durante un determinado periodo de tiempo depende del número de horas que han dedicado ambas empresas a la pesca de acuerdo con la siguiente función: $C = H - bH^2, \quad b > 0$, donde C y H recogen, respectivamente, el volumen de capturas y el número de horas totales($C = C_1 + C_2$; $H = H_1 + H_2$). Suponiendo que el volumen de capturas para una empresa guarda una proporción directa con su *esfuerzo relativo*, esto es: $C_i = (\frac{H_i}{H_i + H_j})C; \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j)$ y que el precio unitario de venta y el coste de la hora de esfuerzo son de p y w unidades monetarias respectivamente, se pide:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1. Determinar el equilibrio de Nash bajo el supuesto de que ambas empresas han de decidir de forma simultánea el número de horas que van a dedicar a la captura de pescado.
2. Comentar detenidamente los resultados de equilibrio.

▶ Ejercicio 3.8.9

Para el juego de la figura adjunta:

1. determine el conjunto de estrategias racionalizables para cada jugador;
2. determine los equilibrios de Nash que tiene;
3. utilícelo para explicar la relación entre estrategias racionalizables y equilibrio de Nash.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	9, 3	4, 8	2, 10
s_{I2}	2, 10	4, 8	9, 3
s_{I3}	7, 5	5, 6	7, 5

Figura 3.15

▶ Ejercicio 3.8.10

Determine el equilibrio de Nash en mixtas del siguiente juego.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	α	β	γ
a	3,2	2,1	1,3
b	2,1	1,5	0,3
c	1,3	4,2	2,2

Figura 3.16

▶ Ejercicio 3.8.11

Dos agentes económicos (I y II), han de decidir de manera simultánea si participan o no en un determinado proyecto. La colaboración en el mismo supone un coste C_i para el agente i. Si al menos uno de ellos asume dicho coste cada uno de ellos recibirá un excedente E_i. En el caso de que ninguno de los dos decida incurrir en el coste de la aportación el excedente a repartir será nulo. Modelice la situación anterior como un juego y determine, el/los equilibrios de Nash (tanto en estrategias puras como en mixtas) en función del valor de los parámetros. [Nota: Considere $E_i, C_i > 0$, i=1,2]

▶ Ejercicio 3.8.12

Dos agentes económicos, A y B han de decidir de manera simultánea su actitud ante el reparto de un determinado bien. En concreto, cada uno de los agentes puede adoptar una actitud "agresiva" o una actitud "pacífica". Denote la valoración en unidades monetarias que hace del bien cada agente por V_i, $i = A, B$, y suponga que los pagos que recibirá en función de la actitud del otro serán:

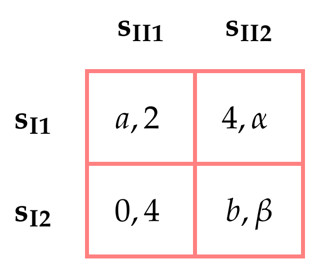
- Si los dos adoptan una actitud "pacífica" recibirá cada uno de ellos la mitad de bien, valorándolo en $\frac{1}{2}V_i$.
- Si i adopta una adopta una actitud "pacífica" y j una actitud "agresiva" éste último se queda la totalidad del bien manteniéndose i en su situación de partida.
- Si los dos adoptan una actitud "agresiva" se llevará cada uno la mitad del bien pero les supondrá un coste de C_i *um*.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Determine todos los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como en mixtas, en función del valor de los parámetros V_i y C_i. Comente detenidamente los resultados.

▶ Ejercicio 3.8.13

Dado el siguiente juego en su forma normal, determine todos los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como en mixtas, en función del valor de los parámetros (suponga que todos ellos son positivos y distintos entre sí).



	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$a, 2$	$4, \alpha$
s_{I2}	$0, 4$	b, β

Figura 3.17

▶ Ejercicio 3.8.14

Un determinado fin de semana $A.G.$y $G.A.$ se desplazaron de Madrid a Santander con la idea de disfrutar de un merecido descanso. El sábado a la noche tuvieron una discusión y cada uno se fue por su lado. El domingo ambos tienen que sacar su billete de vuelta para Madrid y cada uno de ellos sabe que el otro tiene que volver a primera hora de la mañana del lunes y que sólo pueden hacerlo en el tren o en el autobús, cuya hora de salida es en ambos casos a las 8 de la mañana. Plantee, de la manera más general posible, un juego en forma estratégica que refleje cada una de las posibles situaciones siguientes:

A. $A.G.$ desea por encima de todo no encontrarse con $G.A.$, si bien es cierto que siempre ha preferido viajar en autobús. Por el contrario, $G.A.$ desea por encima de todo coincidir en el viaje, si bien es cierto que siempre ha preferido viajar en tren (Suponga que, por experiencias pasadas, las preferencias de cada uno de ellos son conocimiento común).

B. Tanto $A.G.$ como $G.A.$ desean por encima de todo coincidir en el viaje con el fin de reconciliarse aunque $A.G.$ siempre ha preferido viajar en autobús y $G.A.$ en tren (Suponga de nuevo que las preferencias de cada uno de ellos son conocimiento común).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Se pide:

1. Determine el/los equilibrios de Nash tanto en estrategias puras como en mixtas y utilice las correspondencias de mejor respuesta para presentarlos gráficamente.
2. Comente como influye el valor de los parámetros que recogen las ganancias en las estrategias mixtas de equilibrio de cada uno de los juegos.
3. ¿Tiene alguno de los jugadores interés en mover primero en el caso inicial?, ? y en el segundo?

▶ Ejercicio 3.8.15 Competencia en precios en una ciudad lineal

Considere una ciudad lineal, cuya longitud se puede normalizar a la unidad, y suponga que los N consumidores de un bien X se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de la misma. Dicho bien es ofrecido en la ciudad por dos empresas, I y II, las cuales se encuentran situadas en los extremos de la ciudad y que pueden producir las cantidades que deseen a un coste unitario de c *um* $[CT_i(x_i) = cx_i; \quad i = I, II]$.

Dichas empresas compiten entre sí *á la Bertrand* (eligen el precio de manera simultánea). Los consumidores deciden si compran o no una única unidad del bien y, en caso de comprar, a qué empresa lo hacen. Su decisión de compra esta basada en el precio generalizado p_g que incluye el precio fijado por las empresas más el coste de transporte, el cuál suponemos que es de t *um* por unidad de distancia recorrida.

Representa la situación anterior como un juego en forma estratégica y determine todos los equilibrios de Nash del mismo bajo el supuesto de que el precio de reserva de los consumidores cumple la condición:$p_r > c + 3t$.

▶ Ejercicio 3.8.16

En un experimento sobre el comportamiento *social* de los cerdos se encierran en un mismo compartimento un cerdo dominante (D) y un cerdo sumiso (S). En un extremo del compartimento se sitúa una palanca que al ser pulsada por uno de los animales hace que se deposite una cierta cantidad de comida en una pila situada en el otro extremo. Pulsar el botón supone un esfuerzo para los animales y el reparto de la comida depende de cuál sea el animal que pulsa el botón (de cuál llega primero a la pila). Si pulsa S, entonces D se come todo antes que consiga llegar S; si pulsa D entonces S consigue comer una parte de la ración antes de que llegue D; por último si los dos van a pulsar llegarán a la vez comiéndose D la mayor parte. Se pide:

1. Haga la representación en forma normal de esta situación de interdependencia estratégica.
2. Trate de anticipar cual será el desarrollo del juego (la solución) y explique que supuestos hace para realizar dicha predicción.

▶ Ejercicio 3.8.17

Un grupo de N personas es testigo de un delito. Cada una de dichas personas ha de decidir de manera simultánea si avisar (A) o no avisar ($\bar{A}$) a la policía. Suponga que cada una de ellas asigna un valor v a que la policía reciba la información y un coste c a realizar el aviso con $v > c$.

1. Haga la representación en forma estratégica de la situación anterior.
2. Ponga un ejemplo de una combinación de estrategias puras que sería un equilibrio de Nash.
3. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas (simétrico) en el que cada individuo avisa con probabilidad p. ¿Qué sucede con p a medida que el número de personas que ha presenciado el crimen, N, aumenta?





Teoría de Juegos

Tema 5.- Juegos dinámicos con información incompleta

Soraya Hidalgo Gallego
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria

A los juegos con información incompleta también se les denomina juegos bayesianos.

- En un juego con información completa las funciones de ganancias de los jugadores son de dominio público.
- En los juegos con información incompleta al menos un jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador.
- En este tipo de juegos también se distingue entre juegos estáticos y juegos dinámicos, aunque la mayoría de los juegos bayesianos con interés económico son dinámicos.

5.1 Juegos de Señalización

5.1.A Equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización

Un juego de señalización es un juego dinámico con información incompleta y dos jugadores:

E: emisor

R: receptor

El desarrollo del juego es el siguiente:

1. El azar escoge un tipo t_i del conjunto de tipos factibles $T=\{t_1,\dots, t_I\}$ que asigna al siguiente emisor según una distribución de probabilidad $p(t_i)$, donde $p(t_i)>0$ para cada i y $p(t_1)+\dots+p(t_I)=1$.

2. El emisor observa t_i y elige un mensaje m_j del conjunto de mensajes factibles $M=\{m_1,\dots,m_J\}$.

3. El receptor observa m_j (pero no t_i) y elige a continuación una acción a_k de un conjunto de acciones factibles $A=\{a_1,\dots,a_K\}$.

4. Las ganancias vienen dadas por $U_E(t_i, m_j, a_k)$ y $UR(t_i, m_j, a_k)$

Aplicaciones

• Modelo de señalización del mercado de trabajo de Spencer (1973)

– Emisor > Trabajador

– Receptor > Mercado de posibles empresarios

– Tipo > Capacidad productiva del trabajador

– Mensaje > Nivel de educación

– Acción > Salario

• Modelo de inversión empresarial y estructura de capital de Myers y Majluf (1984)

– Emisor > Empresa que necesita capital para financiar un proyecto

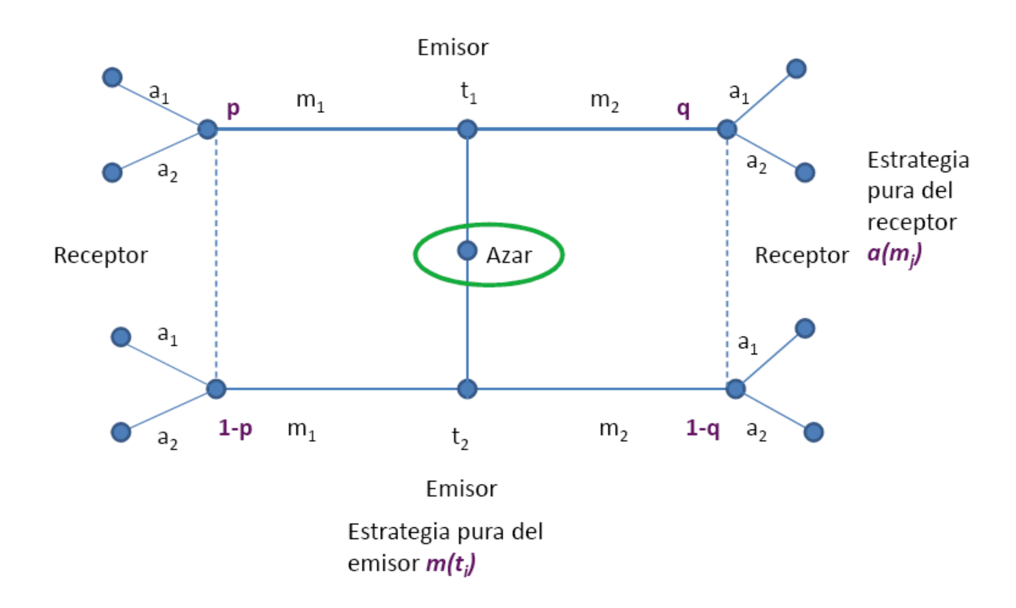
– Receptor > Inversión potencial

– Tipo > Rentabilidad de los activos existentes en la empresa

– Mensaje > Oferta de participación en el beneficio de la empresa a cambio de la financiación

– Acción > Decisión de si invertir o no por parte del inversor

Esquema de Juego de Señalización



• Recordemos que en cualquier juego la estrategia de un jugador es un plan completo de acción.

– En un juego de señalización, una estrategia pura del emisor es una función $m(t_i)$ que especificará el mensaje que elegirá cada tipo que el azar pueda determinar, y una estrategia del receptor es una función $a(m_j)$ que especifica que acción elegirá ante cada mensaje del emisor.

ESTRATEGIAS DEL EMISOR

• ESTRATEGIA 1 DEL EMISOR: Jugar m_1 si el azar determina t_1 y m_1 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 2 DEL EMISOR: Jugar m_1 si el azar determina t_1 y m_2 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 3 DEL EMISOR: Jugar m_2 si el azar determina t_1 y m_1 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 4 DEL EMISOR: Jugar m_2 si el azar determina t_1 y m_2 si el azar determina t_2.

ESTRATEGIAS DEL RECEPTOR

• ESTRATEGIA 1 DEL RECEPTOR : Jugar a_1 si el emisor elige m_1 y a_1 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 2 DEL RECEPTOR : Jugar a_1 si el emisor elige m_1 y a_2 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 3 DEL RECEPTOR : Jugar a_2 si el emisor elige m_1 y a_1 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 4 DEL RECEPTOR : Jugar a_2 si el emisor elige m_1 y a_2 si el emisor elige m_2.

• El emisor conoce la historia completa del juego cuando elige un mensaje, esta elección se da en un conjunto de información con un único nodo.

• Por el contrario, el receptor elige una acción después de observar el mensaje del emisor pero sin conocer el tipo de éste, por lo que la elección del receptor se da en un conjunto de información con más de un elemento.

– **Requisito 1 de señalización**. *Después de observar cualquier mensaje m_j de M, el receptor debe formarse una conjetura sobre qué tipos podrían haber enviado m_j. Denotemos esta conjetura con la distribución de probabilidad $\mu(t_i \mid m_j) \geq 0$ para cada t_i en T y*

$$\sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) = 1$$

Dados el mensaje del emisor y la conjetura del receptor, la acción óptima del receptor será:

– **Requisito 2R de señalización:** *Para cada mj en M, la acción del receptor $a^*(m^j)$ debe maximizar la utilidad esperada del receptor dada la conjetura $\mu(t_i \mid m_j)$ sobre qué tipos podrían haber enviado m_j.*

Es decir, $a^*(m_j)$ es una solución de

$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) U_r(t_i, m_j, a_k)$$

En el caso del emisor, sólo se requiere que su estrategia sea óptima dada la estrategia del receptor, ya que éste tiene la información completa del juego, por lo tanto en su caso el requisito de señalización será:

– **Requisito 2E de señalización:** *Para cada t_i en T, el mensaje del emisor $m^*(t_i)$ debe maximizar la utilidad del emisor dada la estrategia del receptor $a^*(m_j)$. Es decir, $m^*(t_i)$ es una solución de*

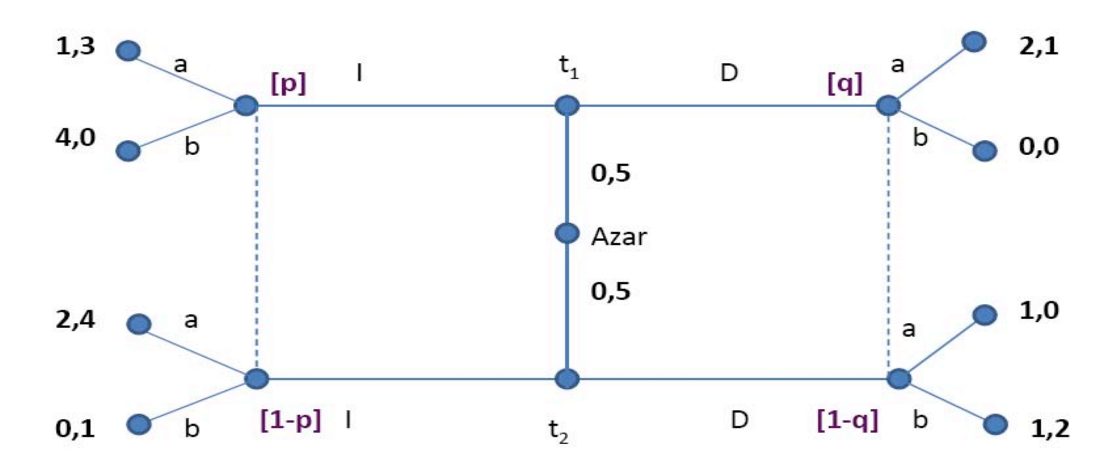
$$\max_{m_j \in M} \quad U_E(t_i, m_j, a^*(m_j))$$

Para los mensajes en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas del receptor deberán cumplir el siguiente requisito:

– **Requisito 3 de señalización:** *Para cada m_j en M, si existe t_i en T tal que $m^*(t_i)=m_j$, la conjetura del receptor debe derivarse de la regla de Bayes y la estrategia del emisor:*

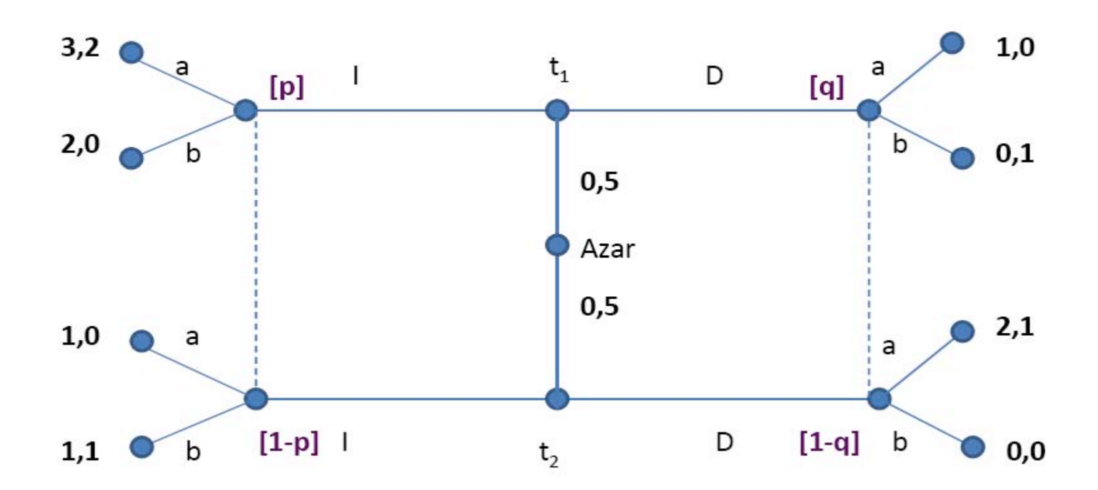
$$\mu(t_i \mid m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_i} p(t_i)}$$

Esquema de juego de señalización con ganancias



5.1.B Refinamiento del equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización

Esquema de juego de señalización con ganancias



Las estrategias y sistema de conjeturas que constituyen equilibrio bayesiano perfecto en el juego de señalización anterior son:

– *[(I,I),(a,b),p=0.5,q] para cualquier q≥1/2*

– *[(I,D),(a,a),p=1,q=0]*

Pero en este juego no tiene sentido que el tipo 1 elija D. Formalmente las estrategias del emisor *(D,I)* y *(D,D)* (es decir, las estrategias en las que el tipo 1 elije D) están estrictamente dominadas a partir del conjunto de información del emisor correspondiente al tipo 1.

• **Definición:** En un juego de señalización, el mensaje m_j de M está dominado para el tipo t_i de T si existe otro m_j' de M tal que la menor ganancia posible de t_i por utilizar m_j' es más alta que la mayor ganancia posible de t_i por utilizar m_j

• Por lo tanto, se debería asignar a q una probabilidad cero.

Requisito 4 de señalización: *Si el conjunto de información que sigue a m_j está fuera de la trayectoria de equilibrio y m_j está dominado para el tipo t_i, entonces (si es posible) la conjetura del receptor $\mu(t_i \mid m_j)$ debería asignar probabilidad cero al tipo t_i. (Esto es posible siempre que m_j no esté dominado para todos los tipos en T).*

En algunos juegos, existen equilibrios bayesianos perfectos que cumplen este último requisito pero aún así parecen poco razonables.

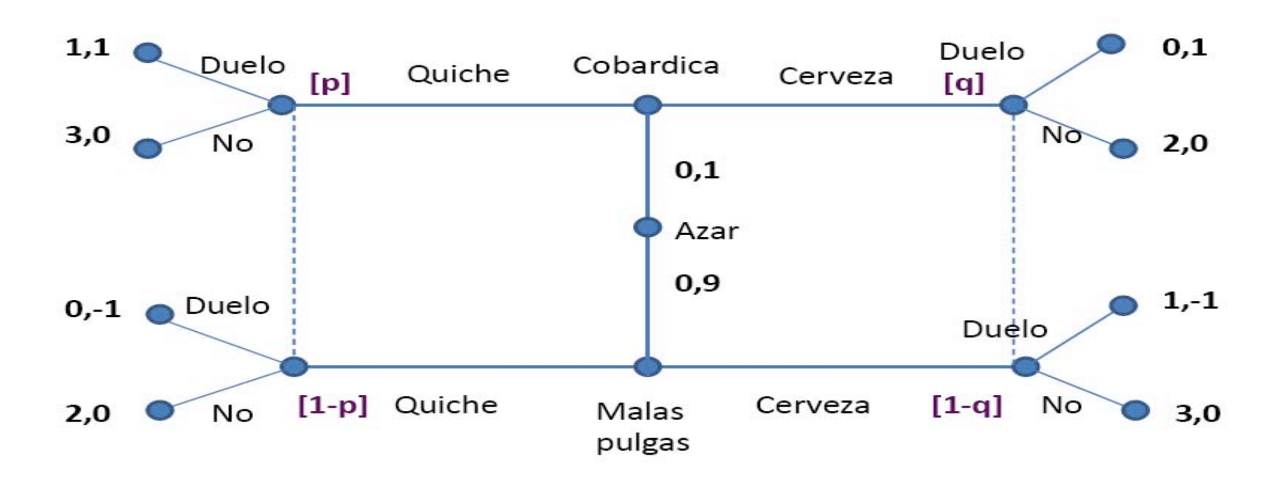
• Una de la áreas de investigación más activa de la Teoría de Juegos se ha preocupado de las dos siguientes cuestiones:

– Cuándo un equilibrio bayesiano perfecto es poco razonable

– Qué requisito adicional puede añadirse a la definición de equilibrio para eliminar estos equilibrios bayesianos perfectos que no son razonables.

• Chop y Kreps (1987) hicieron una aportación original y muy influyente en esta área.

Juego de señalización cerveza y quiche



Las estrategias y sistema de conjeturas que constituyen equilibrio bayesiano perfecto en el juego de señalización anterior son:

– *[(Quiche,Quiche),(no,duelo),p=0.1,q] para cualquier q≥1/2*

– *[(Cerveza,Cerveza),(duelo,no),p,q=0.1] para cualquier p≥1/2*

• Estos equilibrios satisfacen el requisito 4, ya que ningún mensaje está dominado para ningún tipo de emisor.

Vamos a analizar el primero:

[(Quiche,Quiche),(no,duelo),p=0.1,q] para cualquier q≥1/2

• *En particular, nada garantiza que el cobardica vaya a estar mejor por tomar quiché (una ganancia de 1 en el peor de los casos) que por tomar cerveza (ganancia de 2 en el mejor).*

• *Por otra parte, la conjetura del receptor parece sospechosa por el siguiente motivo:*

– *Si el receptor observa que el emisor elige cerveza, concluye que es al menos tan probable que el emisor sea cobardica como que sea malas pulgas (es decir, q≥1/2), a pesar de:*

• *A) El cobardica no puede mejorar de ninguna manera su ganancia de 3 en equilibrio tomando cerveza en vez de quiche.*

• *B) El malas pulgas podría mejorar su ganancia de 2 en equilibrio y recibir una ganancia de 3 si el receptor mantuviera la conjetura de que q<1/2.*

Dados A) y B), cabría esperar que el malas pulgas escogiera cerveza y pronunciara el siguiente discurso:

– Verme escoger cerveza debería convencerte de que soy del tipo "malas pulgas":

• Escoger cerveza no podría de ninguna manera haber mejorado la ganancia del cobardica por A)

• Si escoger cerveza te convenciera de que soy del tipo malas pulgas, entonces hacerlo mejoraría mi ganancia, por B).

• Si este discurso fuera creído, establecería que $q=0$, lo que es incompatible con este equilibrio bayesiano perfecto de agrupación.

Definición: Dado un equilibrio bayesiano perfecto en un juego de señalización, el mensaje m_j de M está dominado en equilibrio para el tipo t_i de T si la ganancia de equilibrio de t_i, que

denotamos mediante $U^*(t_i)$, es más alta que la mayor ganancia posible de t_i por utilizar m_j

• Por lo tanto, se debería asignar a q una probabilidad cero

Requisito 5 de señalización ("El criterio intuitivo", Cho y Kreps 1987): *Si el conjunto de información que sigue a m_j está fuera de la trayectoria de equilibrio y m_j está dominado en equilibrio para el tipo t_i, entonces (si es posible) la conjetura del receptor $\mu(t_i \mid m_j)$ debería asignar probabilidad cero al tipo t_i. (Esto es posible siempre que m_j no esté dominado para todos los tipos en T)*

Cerveza y quiche muestra que un mensaje m_j puede estar dominado en equilibrio para t_i sin estar dominado para t_i. Sin embargo, si m_j está dominado para t_i, m_j debe estar dominado en equilibrio para t_i, por lo que imponer el requisito 5 de señalización hace que el requisito 4 sea redundante.